TRATTATO

D' ARITMETICA

DI GIUSEPPE BERTRAND

Membro dell' Istituto di Francia.

PRIMA TRADUZIONE ITALIANA CON NOTE ED AGGIUNTE

DI GIOVANNI NOVI

Professore di Algebra nella R. Università di Pisa.

Nuova impressione.

FIRENZE.
FELICE LE MONNIER.

1862.

Lire ital. 3. 25.

LIBRI SCOLASTICI.

ALGEBRA E TRIGONOMETRIA per gl' Istituti Tecnici, secondo le norme degli ultimi Programmi ufficiali, per Giuseppe Peri prof. nel R. Istituto Tecnico di Firenze. — Un vol. . . . . *Lire* 4. 00

GEOMETRIA ANALITICA per gl' Istituti Tecnici, secondo le norme degli ultimi Programmi ufficiali, per Giuseppe Peri, prof. nel R. Istituto Tecnico di Firenze. — Un vol. 5. 00

ARIOSTO (Lodovico). ORLANDO FURIOSO, conservato nella sua epica integrità, e recato ad uso della Gioventù dall' ab. Giovacchino Avesani, e corredato di Note storiche e filologiche. — Un grosso volume . . . 5. 60

BERTOLINI (Francesco). STORIA ROMANA DAI PIÙ ANTICHI TEMPI FINO ALLO SCIOGLIMENTO DELL' IMPERO OCCIDENTALE, scritta ad uso della Gioventù italiana. *Seconda edizione*, riveduta ed ampliata dall' Autore con l'aggiunta del Periodo imperiale. — Un volume . . . 4. 00

COMPENDIO DEGLI AMMAESTRAMENTI DI LETTERATURA di Ferdinando Ranalli, fatto da lui medesimo per uso delle Scuole. *Seconda edizione, corretta ed ampliata.* — Un volume . 4. 00

CORNELIO NIPOTE. DELLE VITE DEGLI ECCELLENTI CAPITANI illustrate con spiegazioni e note per cura di C. Gatti. — Un vol. . 1. 50

DIALOGHI SCELTI di Augusto Conti, prof. di Storia della Filosofia nella R. Università di Pisa, per utilità delle Scuole. — Un vol. 3. 50

ELEMENTI DI ARITMETICA del professore Giovanni Novi, — Un volumetto 1. 25

GLI ELEMENTI D' EUCLIDE CON NOTE AGGIUNTE ED ESERCIZI AD USO DE' GINNASI E DE' LICEI, per cura dei professori Enrico Betti e Francesco Brioschi.

Si vendono separati:

LIBRO 1°.	*Lire* - 75	LIBRO 4°, 5° e 6° . .	*Lire* 1 50
— 1°, 2° e 3°. . .	» 1 50	— 11° e 12°. . .	» 1 50

N. B. *I libri* 7°, 8°, 9° e 10° *sono esclusi dai programmi.*

GRAMMATICA DELLA LINGUA ITALIANA di Giuseppe Caleffi; edizione quarta, corretta ed arricchita di osservazioni secondo i manoscritti dell' Autore, per cura di Ulisse Poggi.—Un vol. 3. 50

LA BASSVILLIANA E LA MASCHERONIANA di Vincenzo Monti, annotate da Zanobi Bicchierai ad uso delle Scuole 1. 00

LA GRAMMATICA DEL MIO FELICINO. Conversazioni offerte a' Giovanetti studiosi da ULISSE FOGGI prof. di Letteratura italiana nel R. Liceo di Reggio nell' Emilia. — Un volume 2. 00

LAMBRUSCHINI (Comm. Raffaello). NUOVO SILLABARIO, con parole d' esempio, disposto sotto la direzione dell' Ispettore generale delle Scuole Primarie e Normali. *Cent.* 30

— DEI MIGLIORAMENTI D' INSEGNARE A LEGGERE. Consigli dell' Ispettor generale delle Scuole Primarie e Normali. . . . . *Cent.* 30

— TABELLE DELLE SILLABE PER USO DELLE SCUOLE, disposte dall' Ispettore generale delle Scuole Primarie e Normali 1. 00

TRATTATO

D' ARITMETICA

DI

GIUSEPPE BERTRAND

Membro dell' Istituto di Francia.

PRIMA TRADUZIONE ITALIANA CON NOTE ED AGGIUNTE

DI GIOVANNI NOVI

Professore di Algebra nella R. Università di Pisa.

Nuova impressione.

FIRENZE.

FELICE LE MONNIER.

1862.

AVVERTIMENTO DEL TRADUTTORE.

L'Aritmetica di Bertrand non ha bisogno di raccomandazione; il nome dell'Autore, conosciuto per molti e pregevoli lavori intorno alle più ardue parti delle scienze matematiche, rende superflua qualunque lode. Talchè noi avremmo volentieri risparmiato al lettore un *Avvertimento*, se non ci fosse sembrato necessario dire qualche cosa del modo da noi tenuto nel recare in italiano questa Opera. E invero la nostra non può dirsi realmente una traduzione; poichè noi abbiamo liberamente e senza scrupolo variato, dove ci è sembrato opportuno. Così, senza entrare in particolari, diremo che, oltre numerosi cambiamenti di minore importanza, abbiamo derivate le condizioni di divisibilità per 9 e per 11 da principii diversi da quelli da cui le aveva derivate l'Autore; il capitolo IX, che si trovava nella 1ª edizione, è stato da noi aggiunto a questa traduzione; la teorica dei numeri decimali, quella delle radici quadrate e cubiche, e generalmente quasi tutte le teoriche, hanno ricevuto notevoli variazioni. Nel Capitolo delle *Misure* abbiamo esposto il calcolo dei numeri così detti *complessi*, che non formava parte del testo francese. L'ordine dei Capitoli è stato anche in parte mutato. Il capitolo XX è aggiunto, e preso quasi interamente dall'opuscolo del signor Vieille *Approximations numériques*. Questi mutamenti ci sono stati consigliati dalle non lievi differenze che sono fra l'istruzione pubblica in Francia e presso di noi.

Il merito principale del Trattato di Bertrand consi-

stendo nel metodo con cui è dettato, noi ci siamo sforzati di conservarlo nelle nostre aggiunte e variazioni.

Abbiamo assai spesso fatto uso di lettere invece di numeri nell'esposizione delle varie teoriche appartenenti all'Aritmetica; parendoci che ciò conferisse alla chiarezza, e preparasse i giovani allo studio dell'Algebra. Quei maestri che fossero di opinione differente potranno sostituire alle lettere i numeri, senza che le dimostrazioni debbano soffrire mutazione.

È debito di giustizia l'avvertire che abbiamo tratto molto profitto dai Trattati d'Aritmetica di Serret e di Amante.

SEGNI

E DENOMINAZIONI USATI IN QUEST' OPERA.

$+$ significa *più*
$-$ *meno*
$\times$ *moltiplicato per*
$:$ *diviso per*
$=$ *eguale a*

L' espressione dell' eguaglianza di due numeri si chiama *eguaglianza*; i due numeri si dicono *membri dell' eguaglianza*.

Esempio. $5+7=6\times2$ è una eguaglianza, il primo membro della quale è $5+7$, il secondo 6×2.

Un teorema è una verità non evidente per sè stessa e che diviene tale mediante una dimostrazione.

I numeri aggiunti dal Traduttore sono contrassegnati con un asterisco *.

TRATTATO D'ARITMETICA.

CAPITOLO I.

NOZIONI PRELIMINARI. — NUMERAZIONE DECIMALE.

NOZIONI PRELIMINARI.

1. Si chiama *grandezza* o *quantità* tutto ciò che è suscettivo di aumento o di diminuzione. Quindi uno stesso oggetto fa nascere in noi l'idea di tante quantità diverse quante maniere concepiamo di modificarlo; così la presenza di uno oggetto più o meno lungo, più o meno pesante, moventesi più o meno velocemente, ci fa acquistare la nozione delle quantità che si chiamano *lunghezze*, *pesi*, *velocità*, etc.

2. Le matematiche sono la scienza delle quantità; ma non di tutte le quantità. E invero, tuttochè un oggetto possa essere più o meno bello, più o meno utile, lo studio del bello e dell'utile non è un ramo delle matematiche. *Le matematiche trattano solamente delle quantità misurabili.*

3. Misurare una quantità significa determinarla con precisione, paragonandola ad un'altra quantità della stessa natura che si considera come conosciuta. Dire, per esempio, che una lunghezza ha tre metri, significa darne la misura ed esprimerla mediante il metro.

La quantità che serve a misurarne delle altre prende il nome di *unità*. Nell'esempio precedente il metro è l'unità.

4. Il risultato della misura di una grandezza si rappresenta mediante un *numero*. Quando si dice, per esempio, una distanza di tre metri, un peso di quindici chilogrammi, un vaso di tre quarti di litro, ec., le parole *tre, quindici, tre quarti,* rappresentano numeri.

L'origine più naturale dell'idea di numero si trova nella considerazione di molti oggetti distinti; ed è per estensione che s'introduce nella misura di tutte le grandezze. Così, per esempio, le quantità, un gregge di quindici montoni e un peso di quindici chilogrammi contengono ambedue quindici volte la respettiva unità; ma nella prima l'idea è più semplice, perchè la separazione delle unità è materiale, mentre nella seconda è puramente fittizia.

Le frazioni e i numeri incommensurabili, che i geometri considerano pure come numeri, rappresentano tra la quantità e la sua unità una relazione più complicata, di cui terremo parola più tardi.

5. Quando un numero è enunciato senza indicare la specie delle unità che rappresenta, si chiama numero *astratto;* nel caso contrario, dicesi numero *concreto;* così 7 è un numero astratto, e 7 litri un numero concreto.

Queste denominazioni sono molto comuni; ma dobbiamo avvertire che la seconda potrebbe far nascere una idea inesatta; giacchè un numero concreto non è un numero, ma una quantità. Quando si dice 7 litri, il numero è 7; la parola litro completa ma non modifica l'idea.

6. L'aritmetica comprende l'arte di effettuare le operazioni alle quali danno luogo i numeri e lo studio delle loro proprietà; ma questa seconda parte sarà ridotta in questo trattato alle proposizioni fondamentali che possono facilitare o abbreviare le operazioni.

NUMERAZIONE DECIMALE.

Definizione dei numeri interi.

7. Numeri interi chiamansi quelli che rappresentano l' unità o la riunione di molte unità. Il loro studio forma la parte principale dell' aritmetica, perchè è sempre sui numeri interi che si fanno in ultima analisi le operazioni.

Benchè la maniera di scrivere e di enunciare i numeri interi sia necessariamente familiare a quelli che intraprendono lo studio teorico dell' aritmetica, tuttavia l' importanza di questo sistema di numerazione nell'arte di fare i calcoli è tale che stimiamo indispensabile indicarne accuratamente i principj.

Numerazione parlata.

8. I primi numeri hanno ricevuto nomi indipendenti gli uni dagli altri: *uno*, *due*, *tre*, *quattro*, *cinque*, *sei*, *sette*, *otto*, *nove*, e *dieci*. Il numero *dieci*, che si chiama base del sistema, serve a formare delle nuove unità il cui uso rende notabilmente semplice l' espressione parlata e scritta dei numeri superiori.

Queste unità sono:

L' unità del second'ordine, o dieci unità semplici.
L' unità del terz' ordine, o cento unità semplici.
L' unità del quart' ordine, o mille unità semplici.
L' unità del quint' ordine, o dieci mila unità semplici.
L' unità del sest' ordine, o cento mila unità semplici.
L' unità del settim'ordine, o un milione d'unità semplici.

Ciascuna di queste unità ne vale dieci dell' ordine

precedente; e, per conseguenza, cento dell'ordine che precede di due posti, mille dell'ordine che precede di tre posti, e così di séguito.

Esempio. Un milione vale dieci centinaia di migliaia, cento decine di migliaia, mille volte mille, dieci mila volte cento, e cento mila volte dieci.

Si sono dati nomi particolari a tutti i numeri di decine inferiori a dieci decine. Questi nomi sono: *venti, trenta, quaranta, cinquanta, sessanta, settanta, ottanta, novanta*. È inutile indicare il significato di ciascun nome.

I numeri compresi fra dieci e cento, si esprimono indicando il più gran numero di decine che contengono e aggiungendovi il nome del numero minore di dieci, che li completa. Così dicesi: *trenta sette.*

È evidente che a questo modo si possono enunciare tutti i numeri minori di cento.

I numeri maggiori di cento e minori di mille si esprimono enunciando il più gran numero di centinaia che contengono e aggiungendo il nome del numero, evidentemente minore di cento, che li completa. Così dicesi: *trecento quaranta sette.*

È chiaro che a questo modo possono enunciarsi tutti i numeri minori di mille.

I numeri compresi fra mille e un milione, si esprimono enunciando quante migliaia contengono e unendovi il nome del numero inferiore a mille che li completa: Così dicesi: *trecento quaranta due mila, ottocento cinquanta sette.*

Per esprimere i numeri compresi fra un milione e mille milioni o un *bilione*, s' indica quanti milioni contengono questi numeri, e si aggiunge il nome del numero minore di un milione che li completa. Così dicesi: *trenta cinque milioni, ottocento trenta due mila, trecento quaranta due.*

Si può continuare così indefinitamente, purchè si sappia che mille bilioni fanno un trilione, mille trilioni un quatrilione, ec.

9. Osservazione. Nell'uso abituale del nostro sistema di numerazione, le unità del 4°, 7°, 10°... ordine (*mille, milioni, bilioni,.....*) sono le più importanti. In effetto le altre spariscono dal linguaggio, e, tranne le decine e le centinaia, non sono state neppure create parole speciali per distinguerle; in guisa che nella numerazione parlata, invece di chiamare l'attenzione sulla decomposizione dei numeri in unità del primo, secondo, terzo, quarto, quinto ordine, si presentano come decomposti in unità, migliaia, milioni, ec., cioè a dire in unità di mille in mille volte più grandi. Quest'uso adduce maggiore brevità nel linguaggio; ma non ha alcuna influenza sopra i numeri scritti, sui quali si eseguiscono i calcoli.

Principii della numerazione scritta.

10. I nove primi numeri sono rappresentati da figure particolari, che chiamansi cifre. Queste nove figure, alle quali è stata aggiunta una decima, 0, bastano per scrivere tutti i numeri. Per quest' oggetto si è convenuto di attribuire alle cifre, oltre il loro valore assoluto, un valore relativo dipendente dalla loro posizione: *una cifra rappresenta unità di un' ordine indicato dal posto che occupa cominciando dalla destra*, cioè a dire che rappresenta unità semplici quando non è preceduta da alcun'altra; decine, se ha una cifra alla sua destra; centinaia se ne ha due, ec.

Esempio. Nel numero 4738 la cifra 8 rappresenta unità semplici, 3 decine, 7 centinaia e 4 migliaia.

11. Osservazione. Una cifra può anche essere con-

siderata come rappresentante unità di un ordine qualunque inferiore al suo posto, purchè se ne contino dieci, cento, mille,...., volte più, se sono dieci, cento, mille,..., volte minori. Così, per esempio, 3 seguito da cinque altre cifre esprime egualmente 3 centinaia di migliaia, 30 decine di migliaia, 300 migliaia, 3000 centinaia, 30000 decine, ovvero 300000 unità.

12. Dalla convenzione che precede, si deducono le due regole seguenti, che costituiscono la numerazione scritta.

Regola per leggere un numero scritto.

Quando il numero non ha più di quattro cifre, si enunciano successivamente le differenti cifre, indicando il nome delle unità che rappresentano.

ESEMPIO. 3454, *tremila quattrocento cinquanta quattro.*

Quando ha più di quattro cifre, si decompone in gruppi di tre cifre cominciando dalla destra, avvertendo che l'ultimo può contenere una o due cifre.

Il primo gruppo rappresenta allora unità semplici, il secondo migliaia, il terzo milioni, il quarto bilioni, ec.; si leggono successivamente i numeri formati dall'insieme delle tre cifre di uno stesso gruppo, facendo seguire questa lettura dall'indicazione della specie di unità rappresentata dai gruppi. (*a*)

(*a*) Restando sempre nel medesimo sistema di numerazione decimale taluni spartiscono i numeri in gruppi di sei cifre, invece di tre. Così i gruppi di *unità, migliaia, milioni, bilioni*, ec., sostituiscono quelli di *unità, milioni, bilioni, trilioni*, ec., avvertendo che ogni gruppo contiene unità, decine, centinaia, migliaia, decine di migliaia, centinaia di migliaia.

ESEMPIO. — Il numero 23,784506,034208,390265 col metodo accennato si pronunzia: *venti tre trilioni, settecento ottanta quattro mila cinquecento sei bilioni, trenta quattro mila duecento otto milioni, trecento novanta mila duecento sessanta cinque:* mentre col metodo esposto nel testo si leggerebbe 23 *quintilioni*, 784 *quadrilioni*, 506 *trilioni*, 034 *bilioni*, 208 *milioni*, 390 *mila*, 265 T.

ESEMPIO. Il numero 34211893514, si legge: 34 *bilioni*, 211 *milioni*, 893 *mila*, 514 *unità*.

Regola per scrivere un numero enunciato.

13. Il numero essendo decomposto, come nella numerazione parlata, in unità semplici, migliaia, milioni, bilioni, ec., si scrivono i numeri di ciascuna di queste unità alla destra gli uni degli altri cominciando da quelli dell' ordine più elevato, e terminando con le unità semplici. Fa d' uopo aver cura che ciascuno di questi numeri di unità abbia precisamente tre cifre, e porre quindi dei zeri alla sinistra di quelli che sono espressi con una o due cifre. Se un gruppo di unità mancasse completamente, bisognerebbe porre tre zeri nel posto delle tre cifre che gli corrispondono, affinchè le cifre poste a sinistra conservino il valore relativo che debbono avere.

ESEMPIO. *Settecento quaranta tre milioni, novanta nove unità,* si scrivono: 743 000 099. Si scrivono tre zeri nel posto delle migliaia che mancano, e 099 in vece di 99 pel gruppo delle unità, affinchè questo gruppo contenga tre cifre.

14. Si vede che il nostro sistema di numerazione consiste essenzialmente nella decomposizione dei numeri in diverse parti, che tutte derivano semplicemente dall' unità principale, ciò che permette di farsi più facilmente una idea del loro valore. Ma questo vantaggio è solamente secondario, ed un altro ben più importante si renderà manifesto a misura che avanzeremo nello studio dell' aritmetica. Vedremo che nella soluzione della maggior parte delle quistioni di aritmetica si opera separatamente sopra ciascuna di queste parti invece di operare immediatamente sul numero stesso. (Nota *A* in fondo al vol.).

Esercizi.

I. Si scriva la serie naturale dei numeri senza separare le differenti cifre. Cercare la 75892^{esima} cifra di questa serie.

II. Provare che il numero che esprime quante cifre vi sono nella serie naturale dei numeri, dopo l'unità sino a un numero di cui tutte le cifre sono dei 9,9999999....... ha per ultima cifra un 9 preceduto da un certo numero di 8, i quali ultimi sono preceduti da un numero di tante unità quanti 8 vi sono alla sua destra. Per esempio, il numero di cifre che si deve scrivere per fare la tavola dei primi 99 numeri è 189; per i primi 999 ve ne bisognano 2889; per i primi 9999, 3889, ec.

III. Consideriamo due numeri qualunque, 1 e 2 per esempio, e formiamo una serie di numeri tali che ciascuno sia eguale alla somma dei due precedenti, cioè a dire operiamo nel modo seguente: 1 e 2 fanno 3; 2 e 3 fanno 5; 3 e 5 fanno 8; 5 e 8 fanno 13, ec.; provare che continuando indefinitamente, vi saranno sempre quattro numeri di questa serie almeno, e cinque al più, che avranno un dato numero di cifre.

IV. Una lotteria si compone di 200 numeri, dei quali si hanno solamente i numeri 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Come procedere per fare l'estrazione?

V. Si posseggono cinque pesi di un grammo, cinque di dieci grammi, cinque di cento grammi, cinque di mille grammi, cinque di dieci mila grammi ec. Mostrare che si può pesare mediante una bilancia un oggetto il cui peso è un numero qualunque di grammi.

CAPITOLO II.

ADDIZIONE E SOTTRAZIONE DEI NUMERI INTERI.

—

ADDIZIONE.

Definizione.

15. L' *addizione* consiste nella riunione di due o molte quantità della stessa specie in una sola. In aritmetica queste quantità sono rappresentate da numeri, e l' addizione ha per oggetto di trovare il numero che esprime la loro riunione, ovvero la loro *somma*.

L' addizione s' indica col segno +.

Esempio. 5+7 significa 5 più 7.

Per aggiungere due numeri, è inutile conoscere la specie delle unità che rappresentano, ma è sufficiente sapere che queste unità sono le stesse. Così, dicendo: *sette e tre fanno dieci*, si esprime ad una volta che: *sette metri e tre metri fanno dieci metri*, *sette case e tre case fanno dieci case*, *sette centinaia e tre centinaia fanno dieci centinaia*.

È indispensabile sapere che i numeri astratti non rappresentano nulla per loro stessi; e che operando sopra essi s' intende solamente che la specie delle unità che rappresentano non è ancora fissata, ma potrà esserlo ulteriormente in un modo arbitrario.

Addizione dei numeri di una sola cifra.

16. Per eseguire un' addizione, fa d' uopo sapere aggiungere i numeri di una sola cifra. Non vi sono re-

gole per trovare i resultati di queste semplici operazioni che è mestieri apprendere a memoria. Si può ottenerli facilmente contando sulle proprie dita. Non insisto sopra questo metodo conosciuto da tutti, e del quale ben pochi hanno bisogno di fare uso.

Principio sul quale riposa la teoria dell'addizione.

17. L'addizione di due numeri qualunque si riduce all'addizione dei numeri minori di dieci, mediante il principio seguente:

Per addizionare due numeri, si può, dopo averli decomposti in molte parti, aggiungere in un ordine qualunque queste parti le une alle altre, e riunire le somme che ne risultano. In effetto è evidente che il risultato così ottenuto conterrà tutte le parti dei due numeri, e sarà per conseguenza la loro somma.

Addizione di due numeri.

18. Siano da addizionare i due numeri 7847 e 3952,

$$\begin{array}{r} 7847 \\ 3952 \\ \hline 11799 \end{array}$$

Questi due numeri possono essere decomposti ciascuno in quattro parti: unità, decine, centinaia, migliaia; e si potrà, secondo il principio precedente, aggiungere separatamente le unità dello stesso ordine e riunire i resultati parziali.

Si dirà 7 e 2 fanno 9; 9 può essere scritto immediatamente come cifra delle unità, giacchè le operazioni seguenti forniranno unità di ordine superiore, e non po-

tranno, per conseguenza, modificare la cifra delle unità semplici.

4 decine e 5 decine fanno 9 decine; si può, per una simile ragione, scrivere 9 come cifra delle decine.

8 centinaia e 9 centinaia fanno 17 centinaia, cioè a dire un migliaio più 7 centinaia; si può scrivere 7 come cifra delle centinaia e aggiungere il migliaio alla somma delle migliaia.

7 migliaia e tre migliaia fanno 10 migliaia, più quello ottenuto innanzi, avremo 11 migliaia, cioè a dire una decina di migliaia e un migliaio; le cifre corrispondenti a questi due ordini di unità sono, per conseguenza, l' uno e l' altro eguale a 1, e la somma domandata è 11799.

Un ragionamento analogo potrà farsi in ciascun caso; quindi si ha la regola seguente:

Per eseguire l' addizione di due numeri, si scrivono l' uno al disotto dell' altro in modo che le unità dello stesso ordine si corrispondano. Si aggiungano dapprima le cifre delle unità; se questa somma non è maggiore di 9, si scrive al risultato di cui essa è la cifra delle unità; se supera 9, si scrivono le sole unità e si porta una decina per unirla alla somma ottenuta mediante l'addizione delle cifre delle decine. Si continua al modo stesso addizionando sempre le unità dello stess' ordine nei due numeri sino a quelle dell' ordine più elevato, la cui somma, aggiunta a ciò che si è riportato precedentemente, si scrive come si è trovata.

Se uno dei due numeri proposti ha meno cifre dell' altro, la regola precedente si applica al modo stesso, dovendosi solamente considerare le cifre mancanti alla sinistra del più piccolo numero come rimpiazzate da zeri.

Addizione di molti numeri.

19. Per aggiungere più di due numeri si procede in un modo analogo e in conformità della regola seguente:

Per sommare molti numeri, si scrivono gli uni sotto gli altri in modo che le unità dello stess' ordine si trovino sopra una medesima colonna verticale. Si fa la somma delle cifre della prima colonna a destra ch' è quella delle unità; se questa somma non sorpassa 9, *si scrive al risultato come cifra delle unità. Se sorpassa* 9, *si scrivono le sole unità, e le decine si ritengono a memoria per unirle alla seconda colonna, sulla quale si opera in un modo analogo e così di seguito sino all' ultima colonna, la cui somma, unita a ciò che si è riportato precedentemente, si scrive come si è trovata.*

Questa regola non ci sembra aver bisogno di dimostrazione; per applicarla fa d' uopo sapere sommare molti numeri di una sola cifra; questa addizione si farà successivamente, cioè a dire che si sommeranno i due primi numeri, poi il risultato ottenuto col terzo, e così di seguito. Queste operazioni si eseguiscono ordinariamente a memoria.

Riprova dell' addizione.

20. La riprova di un' operazione è una seconda operazione che serve di riscontro alla prima. Per fare la riprova di un' addizione, si può ricominciare l' addizione stessa in un altro ordine, per esempio aggiungendo dal basso in alto se la prima volta si era sommato dall' alto in basso. Se si ritrova così il risultato già ottenuto, si ha una forte ragione per crederlo esatto.

SOTTRAZIONE.

Definizione.

21. La *sottrazione* ha per oggetto di cercare la differenza di due quantità, o, in altri termini, ciò che si deve aggiungere alla minore di esse per renderla eguale alla maggiore. In aritmetica queste quantità sono rappresentate da numeri, e la sottrazione ha per oggetto di trovare la differenza di due numeri. Per cercare la differenza di due numeri, è inutile conoscere la specie delle unità che rappresentano; così dicendo: *dodici meno quattro fanno otto*, si esprime ad una volta che *dodici metri meno quattro metri fanno otto metri*, *dodici case meno quattro case fanno otto case*, *dodici centinaia meno quattro centinaia fanno otto centinaia.*

La sottrazione s' indica col segno — .

Esempio. 12—4 significa 12 meno 4.

Il risultato di una sottrazione si chiama qualche volta *resto;* i due numeri sui quali si opera, vengono detti *termini* della sottrazione (*a*).

Per trovar la differenza di due numeri qualunque fa d'uopo sapere a memoria le differenze dei numeri di una sola cifra, come pure la differenza tra un numero di una sola cifra e un numero maggiore che non lo superi di dieci unità. Questi risultati sono, in sostanza, identici a quelli che si debbono sapere a memoria per fare le addizioni; per esempio, sapere che 7 e 5 fanno 12, è sapere che 12 meno 5 fa 7.

Principii sui quali riposa la teoria della sottrazione.

22. Il ragionamento che conduce alla regola di sottrazione è fondato sui seguenti principj.

(*a*) Il numero maggiore di una sottrazione è anche chiamato *diminuendo* o *sottraendo*, e il minore *diminutore* o *sottrattore*.

1° *Se due numeri sono decomposti in uno stesso numero di parti, e che tutte le parti del maggiore sorpassino le parti corrispondenti del minore, la differenza dei due numeri potrà ottenersi sommando la differenza delle parti corrispondenti.*

Esempio. 8 sorpassa 5 di 3 unità, e 11 sorpassa 7 di 4 unità. La somma 8+11 sorpassa 5+7, di 3+4 o di 7 unità.

2° *La differenza di due numeri non cambia aumentando l' uno e l' altro egualmente.*

Sottrazione di due numeri.

23. I due principii precedenti appartengono a quelli che si renderebbero men chiari cercando spiegarli.

Il primo basta quando tutte le cifre del numero maggiore sorpassano le cifre corrispondenti del minore. Sia in fatti da sottrarre 421103 da 783214; scriviamo questi due numeri l' uno al disotto dell' altro in guisa che le cifre che esprimono unità dello stess'ordine si corrispondano sopra una medesima linea verticale:

```
783214
421103
------
362111
```

si toglierà successivamente ciascuna cifra del diminutore da quella che si trova al disopra, e si otterranno le cifre della differenza, giacchè operando a questo modo, si toglie evidentemente ciascuna parte del numero minore dalla parte corrispondente del maggiore e si riuniscono i risultati di queste sottrazioni.

Allorchè la condizione precedente non è soddisfatta, l' operazione è alquanto meno semplice; sia da sot-

trarre 27513 da 31274; scriviamo questi due numeri l'uno al disotto dell'altro:

$$\begin{array}{r} 31274 \\ 27513 \\ \hline -3761 \end{array}$$

diremo: 3 unità sottratte da 4 unità, resta 1 unità; 1 decina sottratta da 7 decine, restano 6 decine; 5 centinaia da 2 centinaia non possono togliersi; aggiungeremo allora 10 centinaia al numero superiore, e diremo: 5 centinaia da 12 centinaia restano 7 centinaia.

Pel secondo principio, affinchè la differenza non sia mutata, fa d'uopo aggiungere 10 centinaia o un migliaio al numero inferiore; quindi continueremo l'operazione come se questo numero avesse per cifra delle migliaia 8. Diremo: 8 migliaia non si possono togliere da 1 migliaio, dunque aggiungiamo dieci mila al numero superiore, e diciamo: 8 migliaia da 11 migliaia, restano 3 migliaia.

Poichè si è di nuovo aumentato il numero superiore, dobbiamo aumentare d'altrettanto il numero inferi re, e a quest' oggetto basterà continuare l'operazione come se la cifra delle decine di migliaia fosse 3. Questa cifra 3 tolta da 3, darà per resto 0, in guisa che la differenza è 3761.

Osservazione. Nel ragionamento precedente abbiamo supposto che i due numeri avessero un egual numero di cifre; quando ciò non fosse, si rimpiazzerebbero le cifre mancanti alla sinistra del numero minore con zeri che sarebbe anche inutile scrivere.

Quindi potremo enunciare la regola seguente:

24. *Per fare la sottrazione di due numeri interi si scrive il minore sotto il maggiore, in guisa che le unità dello stess' ordine si corrispondano, poi si toglie*

ciascuna cifra inferiore da quella ch' è posta al disopra, cominciando dalla destra; se una di queste sottrazioni è impossibile, si aggiungono dieci unità alla cifra superiore, ma allora si continua l' operazione come se la cifra seguente del numero da sottrarre fosse maggiore di una unità. I risultati di queste diverse sottrazioni sono le cifre della differenza cercata.

25. Talora, per fare una sottrazione, si procede in un modo alquanto differente, al quale taluni trovano vantaggio.

Sia da sottrarre 27513 da 31274:

$$\begin{array}{r} 31274 \\ 27513 \\ \hline -3761 \end{array}$$

se il resto fosse noto, aggiungendolo a 27513 si dovrebbe ottenere 31274; questa considerazione è sufficiente per trovare successivamente le sue differenti cifre cominciando da quella delle unità.

La cifra delle unità aggiunta a 3 deve dare per somma 4 o 14; poichè la somma non può essere 14 (giacchè la cifra cercata dovrebbe essere eguale a 11), dev' essere 4. Per conseguenza, la cifra delle unità è eguale a 1.

1 e 3 fanno 4; quindi nell' addizione di 27513 col resto ignoto non si riporta nulla in questa prima operazione.

La cifra delle decine del resto, aggiunta a 1, deve dare per somma 7 o 17, e poichè la somma non può essere 17 (perchè altrimenti la cifra cercata dovrebb'essere eguale a 16), sarà 7 e la cifra delle decine del resto è, per conseguenza, 6.

6 e 1 fanno 7, quindi nell' addizione di 27513 col resto ignoto non si riporta nulla alla terza colonna.

La cifra delle centinaia del resto, aggiunta a 5,

deve dare per somma 2 o 12; la somma non può evidentemente essere eguale a 2, fa d' uopo dunque che sia 12 e, per conseguenza, la cifra delle centinaia è 7.

7 e 5 fanno 12; dunque, nell' addizione di 27513 col resto ignoto, si avrà 7 come cifra delle centinaia e si dovrà riportare un migliaio.

La cifra delle migliaia del resto, aggiunta a 7 e al migliaio ch' è stato riportato, deve dare per somma 1 o 11. La somma non potendo evidentemente essere 1, fa d' uopo che sia 11 e, per conseguenza, la cifra delle migliaia è 3.

3 e 7 fanno 10 e 1 che si è portato 11; bisognerà dunque, nell' addizione di 27513 col resto ignoto, porre 3 come cifra delle migliaia e riportare 1.

Finalmente la cifra delle decine di migliaia del resto, aggiunta a 2, e a questa decina di migliaia che è stata riportata, deve dare 3 per somma; dunque la cifra è 0, e il resto cercato è 3761.

Ecco come fa d' uopo parlare eseguendo l' operazione a questo modo:

$$\begin{array}{r} 31274 \\ 27513 \\ \hline -3761 \end{array}$$

3 e 1 fanno 4 (dopo aver detto ciò, si scrive la cifra 1), 1 e 6 fanno 7 (si scrive allora la cifra 6), 5 e 7 fanno 12, pongo 2 e riporto 1 (si scrive allora la cifra 7), 7 e 1 che ho portato 8, 8 e 3, 11, pongo 1 e riporto 1 (si scrive la cifra 3), 2 e 1 che ho portato 3, 3 e 0, 3. L' operazione è terminata.

Per fare agevolmente uso di questo processo, fa d' uopo essere ben familiari con le addizioni dei numeri di una sola cifra, perchè, conoscendo un d' essi e la somma che si vuole avere, il nome dell' altro si pre-

senta subito alla mente; è in questo caso solamente che si potrà addizionare il resto col diminutore, anche prima che il resto sia scritto.

Prova della sottrazione.

26. Per verificare una sottrazione, fa d'uopo aggiungere il resto al diminutore; il risultato di questa addizione dev' essere eguale al diminuendo.

Al modo stesso che l'addizione serve di prova alla sottrazione, la sottrazione può servire di prova all'addizione. In effetto, perchè un' addizione sia esatta, fa d'uopo che togliendo dalla somma ottenuta uno dei due numeri aggiunti, si trovi l'altro per resto.

Sottrazione di una differenza.

27. Teorema. *Per togliere da un numero la differenza di due altri, bisogna togliere il maggiore e aggiungere il minore al risultato.*

Debbasi, per esempio, sottrarre 10—3 da 15. La differenza di questi due numeri non muta (22) aggiungendo tanto all'uno quanto all'altro 3, cioè a dire sottraendo 10 da 15+3. Quindi

$$15-(10-3)=15+3-10.$$

Questa dimostrazione è generale, giacchè non dipende affatto dalla scelta particolare dei numeri 10 e 3.

Esercizi.

I. Per sottrarre due numeri l'uno dall'altro, per esempio, 78324 da 92143, si può procedere nel modo seguente:

$$\begin{array}{r} 92143 \\ 78324 \\ \hline 13819 \end{array}$$

Operate come se si trattasse di una addizione, sostituendo alla cifra delle unità del diminutore ciò che le manca per essere eguale a dieci, e alle altre le loro differenze da nove, e sopprimendo dal resultato la cifra 1 che si trova necessariamente alla sinistra. Così, nell'esempio precedente, si dirà 6 e 3 fanno 9; 7 e 4, 11, scrivo 1 e riporto 1; 6 e 1, 7, e 1 riportato, 8; 1 e 2, 3; 2 e 9, 11 che scrivo, e cancello, secondo la regola, l'ultima cifra 1.

II. Per aggiungere due numeri, si può procedere come se si trattasse di una sottrazione, sostituendo alla cifra delle unità di uno dei numeri ciò che le manca per essere eguale a 10, e alle altre, ciò che manca loro per essere eguali a 9, e aumentando il secondo numero di una unità dell'ordine immediatamente superiore a quello che esprime l'ultima cifra del primo. Così, per aggiungere 3752 e 8796, si toglierà 1204 da 13752.

III. Quando si aggiungono molti numeri, la somma delle cifre del resultato è superata dalla somma totale delle cifre dei numeri aggiunti, di un numero esatto di volte 9.

IV. Aggiungendo la somma di due numeri alla loro differenza, si ottiene per resultato il doppio del maggiore; e togliendo la differenza di due numeri dalla loro somma, si ottiene per resultato il doppio del minore.

V. Trovare tre numeri tali che la somma dei due primi sia 12, quella dei due ultimi 16, e quella del primo e dell'ultimo 14.

VI. Provare che aggiungendo 11 a un numero, la differenza tra la somma delle cifre di posto impari cominciando dalla destra, e la somma delle cifre di posto pari, non può essere cambiata che di un numero esatto di volte 11, ed enumerare i differenti casi che possono presentarsi.

VII. La produzione del ferro fuso in Francia, è stata nel 1847, di 5223852 quintali metrici. Inoltre si sono importati

Dal Belgio.	457484qm
Dall'Inghilterra.	368918
Dalla Germania.	17529
Dalla Svizzera.	7735

Dalla Sardegna. 7704
Da diversi paesi. 66

Finalmente si sono impiegati 443,196 quintali metrici di vecchio ferro fuso. L'esportazioni si elevano a 466 quintali metrici; il resto è stato impiegato in Francia, una parte alla fabbricazione del ferro e dell' acciajo, l' altra al modellamento di diversi oggetti. Sapendo che 1817147 quintali metrici hanno servito a quest' ultimo oggetto, trovare il peso del ferro fuso impiegato alla fabbricazione del ferro e dell' acciajo.

VIII. Il consumo del carbone di terra in Francia è stato nello stesso anno, di 66088848 quintali metrici. Di questi 44693420 provengono da mine indigene. Sapendo che si sono esportati 543792 quintali metrici, trovare la quantità che ci è stata fornita dai paesi stranieri. (Il Belgio e la Gran-Brettagna.)

IX. Il numero delle nascite in Francia è, annualmente, di 498012 maschi e 468342 femmine; il numero dei morti è di 395024 pel sesso mascolino e 389452 pel sesso femminile; qual' è l' aumento annuale di popolazione dell' uno e l' altro sesso?

X. Il numero delle nascite è stato per i maschi, nel 1811, di 468523; il numero dei giovani chiamati pel reclutamento del 1832, fu di 284101, qual' è il numero di quelli morti prima di aver raggiunta l' età di 21 anno?

CAPITOLO III.

MOLTIPLICAZIONE DEI NUMERI INTERI.

—

Definizioni.

28. Allorchè una quantità si ripete un numero intero di volte, si dice che si *moltiplica* per questo numero intero. La quantità riceve allora il nome di *moltiplicando,* e il resultato è il suo *prodotto* pel numero intero che ha servito da *moltiplicatore.*

Esempio. Cinque volte 12 mesi, ovvero 60 mesi, è il prodotto del moltiplicando 12 mesi, pel moltiplicatore cinque.

In Aritmetica il moltiplicando è rappresentato da un numero, e si cerca il numero che rappresenta il prodotto. Il moltiplicando e il moltiplicatore si chiamano i *fattori del prodotto;* si dice anche che il prodotto è un *multiplo del moltiplicando;* in generale, chiamansi *multipli di un numero,* o di una *quantità,* i prodotti ottenuti moltiplicando questo numero, questa quantità, per un numero intero qualunque.

Esempio. I multipli di 3 sono 3, 6, 9, 12, 15, 18, ec., cioè a dire, una volta 3, due volte 3, tre volte 3, ec. La moltiplicazione s'indica col segno $\times$.

Esempio. 5×7, si legge: 5 moltiplicato per 7.

28'. I multipli di un numero, per esempio, di 3, si possono rappresentare in generale con $m\times3$, essendo m un numero intero qualunque. Spesso ci gioveremo delle lettere dell'alfabeto per esprimere i numeri; ciò apporta molta semplicità nelle dimostrazioni.

Tavola di moltiplicazione.

29. Per eseguire una moltiplicazione, fa d' uopo conoscere i prodotti formati da due numeri di una sola cifra: questi prodotti si trovano nella tavola seguente, nell' incontro delle colonne orizzontali e verticali, al principio delle quali i fattori sono scritti.

Ciascuno dei numeri che si trovano in una colonna verticale di questa tavola si ottiene aggiungendo al precedente quello che comincia la colonna, così di quest' ultimo si forma successivamente il doppio, il triplo, il quadruplo, etc. Questi resultati debbono impararsi a memoria, chè sarebbe impossibile eseguire i calcoli se bisognasse ricorrere alla tavola ogni volta che si debbono moltiplicare due numeri di una sola cifra.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Principj sui quali riposa la moltiplicazione.

30. *Se il moltiplicando è la somma di molti numeri, si otterrà il prodotto, moltiplicando successivamente ciascun d' essi pel moltiplicatore e aggiungendo i resultati.*

Sia da moltiplicare $2+4+7$ per 3. Giovandosi dell' osservazione che la moltiplicazione è una addizione di numeri uguali, le seguenti eguaglianze sono evidenti:

$$(2+4+7)\times3=2+4+7+2+4+7+2+4+7$$
$$=2\times3+4\times3+7\times3.$$

31. *Se il moltiplicatore è la somma di molti numeri, si otterrà il prodotto, moltiplicando successivamente il moltiplicando per ciascun d' essi e aggiungendo i resultati.*

Giacchè si potrà, per esempio, ripetere un numero diciassette volte, ripetendolo dapprima dieci volte e poscia sette volte.

ESEMPIO. 8 essendo eguale a 5 più 3, 8 volte 9 è evidentemente eguale a 5 volte 9 più 3 volte 9. In effetto si può verificare che,

$$72=45+27.$$

32. *Il prodotto di due numeri interi non cambia invertendo i fattori.*

Siano i fattori 5 e 3; fa d' uopo provare che 5 volte 3 è uguale a 3 volte 5. Pel primo principio (30) si ha

$$3\times5=(1+1+1)\times5=5+5+5=5\times3:$$

questo eguaglianza dimostra il terzo principio.

33. *Per moltiplicare un numero intero per* 10,

100, 1000 ec., *basta scrivere uno, due, tre ..., zeri alla sua destra.*

In effetto è evidente che operando a questo modo si renderà il valore rappresentato da ciascuna cifra, 10, 100, 1000 ... volte più grande.

Esempio. Il prodotto di 3752 per 100000 è 375200000.

Moltiplicazione di un numero qualunque per un moltiplicatore di una sola cifra.

34. Sia da moltiplicare 7283 per 5.

Il numero 7283 si può considerare come la somma di 3 unità più 8 decine più 2 centinaia più 7 migliaia; quindi (30) bisogna ripetere cinque volte ciascuna di queste parti; ciò che può effettuarsi agevolmente mediante la tavola della moltiplicazione. In effetto:

5 volte 3 unità fanno 15 unità.
5 volte 8 decine fanno 40 decine.
5 volte 2 centinaia fanno 10 centinaia.
5 volte 7 migliaia fanno 35 migliaia.

Nella pratica si aggiungono questi prodotti parziali a misura che si ottengono. Così nell' esempio precedente si dirà:

$$\begin{array}{r} 7283 \\ 5 \\ \hline 36415 \end{array}$$

5 volte 3 unità, 15 unità; si pongono 5 unità e si riporta una decina. 5 volte 8 decine, 40 decine, e la decina del prodotto precedente, 41 decine; si scrive una decina e si portano 4 centinaia. 5 volte 2 centinaia, 10 centinaia e 4 riportate, 14 centinaia; si scrivono 4 centinaia e si porta 1 migliaio. 5 volte 7 migliaia, 35 migliaia e 1 riportato, 36 migliaia, che si scrivono

alla sinistra delle tre prime cifre ottenute, ciò che dà per prodotto 36415.

Moltiplicazione di un numero qualunque per una cifra significativa seguita da uno o più zeri.

35. Abbiasi da moltiplicare 7283 per 500. Si ha

$$7283 \times 500 = 7283 \times (5+5+5+......);$$

il 5 contenuto nella parentesi dev' essere ripetuto cento volte; quindi

$$7283 \times 500 = 7283 \times 5 + 7283 \times 5 + 7283 \times 5 + ...$$

ripetuto cento volte; cioè a dire

$$7283 \times 500 = 36415 \times 100 = 3641500.$$

Possiamo dunque enunciare la regola seguente.

Per moltiplicare un numero qualunque per una cifra significativa seguita da uno o più zeri, si moltiplica per questa cifra, considerata come rappresentante unità semplici, e si scrivono alla destra del prodotto tanti zeri quanti ve ne sono alla destra del moltiplicatore.

Moltiplicazione di due numeri qualunque.

36. Sia da moltiplicare 375 per 286. Per ripetere 375, 286 volte, basta (31) ripeterlo successivamente 6 volte, 80 volte e 200 volte, ed aggiungere i resultati. Ciascuna di queste moltiplicazioni parziali rientra in uno dei due casi precedenti e non richiede nuove spiegazioni; possiamo quindi enunciare la regola seguente.

Per fare il prodotto di due numeri interi, si moltiplica successivamente il moltiplicando per ciascuna delle cifre del moltiplicatore, e si aggiungono i resultati, dopo aver posto alla destra di ciascuno di essi un numero di zeri eguale al numero delle cifre che precedono il moltiplicatore da cui proviene.

Nella pratica si fa a meno di scrivere gli zeri, limitandosi a dare alle cifre dei prodotti parziali, il posto che occuperebbero dopo l'addizione di questi zeri

ESEMPIO:

```
   375
   286
  ----
  2250
 3000
 750
------
107250
```

Prodotti di molti fattori.

37. Per fare il prodotto di molti fattori, basta moltiplicare i due primi, il resultato ottenuto pel terzo, questo resultato pel quarto, e così di seguito.

ESEMPIO. $2 \times 3 \times 5 \times 4 \times 6$ significa: il prodotto di 2 per 3, che è 6, moltiplicato per 5, dà 30; poscia il resultato per 4 dà 120, e infine quest'ultimo resultato per 6, dà 720.

Quadrati e potenze.

38. Il prodotto di un numero per sè stesso si chiama il suo *quadrato* o la sua *potenza seconda.* Se il numero è preso 3 volte come fattore, il prodotto si chiama *cubo* o *terza potenza;* in generale se un numero si prende 4, 5, 6,... volte come fattore, il prodotto si chiama *quarta, quinta, sesta,... potenza di questo numero.*

ESEMPIO. Nel nostro sistema di numerazione, le unità dei diversi ordini, dieci, cento, mille, ec., sono le potenze della base dieci.

Per scrivere una potenza di un numero, si scrive al

di sopra di esso il numero di volte che deve essere preso come fattore, il qual numero si chiama l' *esponente della potenza.*

Esempio. 10^3, significa 10 a cubo, o 1000; 3 è l'esponente.

Teoremi relativi alla moltiplicazione.

39. Teorema I. *Un prodotto non cambia invertendo i fattori.*

Comecchè la dimostrazione di questo teorema sia stata già data (32) pel caso di due fattori, noi la riproduciamo, a fine di riunire tutto ciò che è relativo a questa importante proposizione.

1° *Un prodotto di due fattori non cambia invertendo i fattori.*

Siano i fattori 5 e 3; fa d' uopo provare che 5 volte 3 è eguale a 3 volte 5.

Si ha:

$$3 \times 5 = (1+1+1) \times 5 = 5+5+5 = 5 \times 3.$$

2° *Un prodotto non cambia invertendo i due primi fattori.*

Sia, in effetto, il prodotto $5 \times 7 \times 8 \times 9$, fa d' uopo provare che è uguale a $7 \times 5 \times 8 \times 9$. Ora per effettuare la prima operazione bisogna moltiplicare 5 per 7, il prodotto per 8 e il nuovo prodotto per 9. Per effettuare la seconda bisogna moltiplicare 7 per 5, il prodotto per 8 e il nuovo prodotto per 9; ciò ch' è assolutamente la medesima cosa, poichè cinque moltiplicato per sette è uguale a sette moltiplicato per cinque.

3° *Un prodotto di tre fattori non cambia invertendo i due ultimi.*

Sia il prodotto $12 \times 5 \times 3$; bisogna provare che è

uguale a $12\times3\times5$. Ciò risulta ancora dal teorema relativo al caso di due fattori, in virtù del quale 5×3 è eguale a 3×5; in effetto questa eguaglianza significa che tre volte 5 *unità* valgono 5 volte 3 *unità*. La parola unità indicando qui una grandezza affatto arbitraria, potremo prendere per essa una collezione di dodici oggetti, o una *dozzina;* e per conseguenza

3 *volte cinque dozzine valgono* 5 *volte* 3 *dozzine;*

ciò ch'è la traduzione in linguaggio ordinario dell' eguaglianza che vogliamo provare,

$$12\times5\times3 = 12\times3\times5;$$

giacchè, il primo membro di questa eguaglianza esprime cinque dozzine ripetute tre volte, e il secondo tre dozzine ripetute cinque volte (*a*).

4° *Un prodotto non cambia invertendo i due ultimi fattori.*

Si ha il prodotto $3\times7\times8\times9\times5\times4$; bisogna provare che è uguale a $3\times7\times8\times9\times4\times5$.

Per formare questi due prodotti, bisognerebbe cominciare, nei due casi, dal moltiplicare 3 per 7, il prodotto per 8 e il nuovo prodotto per 9. Senza effettuare queste operazioni, indichiamone il resultato con una lettera P; per compiere il primo prodotto, fa d'uopo moltiplicare P per 5 e il prodotto per 4; per compiere il secondo bisogna moltiplicare P per 4 e il prodotto per 5, ciò ch'è la medesima cosa, poichè, in virtù del teorema precedente si ha

$$P\times5\times4 = P\times4\times5.$$

5° *Un prodotto non cambia invertendo due fattori consecutivi.*

(*a*) Questo teorema può dimostrarsi ancora nel seguente modo:

$$12\times3\times5 = 12\times(1+1+1)\times5 = (12+12+12)\times5$$
$$= 12\times5+12\times5+12\times5 = 12\times5\times3. \quad \text{T.}$$

Sia il prodotto $3\times5\times7\times9\times11\times4\times5\times6$. Fa d'uopo provare che è uguale a $3\times5\times7\times9\times4\times11\times5\times6$.

Secondo la proposizione precedente si ha

$$3\times5\times7\times9\times11\times4=3\times5\times7\times9\times4\times11.$$

Se questi due numeri eguali si moltiplicano per 5 e i resultati ottenuti per 6, i prodotti saranno evidentemente eguali, e per conseguenza

$$3\times5\times7\times9\times11\times4\times5\times6=3\times5\times7\times9\times11\times4\times5\times6;$$

ciò che bisognava dimostrare.

6. *Dimostriamo in fine che in un prodotto di molti fattori, si può cambiare in un modo qualunque l' ordine de' fattori senza alterare il valore del prodotto.*

È permesso (5°) invertire due fattori consecutivi. Ora mediante una serie d' inversioni di questo genere, si potranno ridurre i fattori a succedersi in quell' ordine che si vorrà. In effetto, si potrà scegliere uno qualunque tra essi e condurlo al primo posto mutandolo successivamente con quelli che si troveranno alla sua sinistra. Ciò fatto, si potrà scegliere un secondo e condurlo al modo stesso al secondo posto, poi un terzo, che si farà pervenire al terzo posto, e così di seguito, sino a che si trovino posti nell' ordine assegnato.

40. Teorema II. *Per moltiplicare un numero pel prodotto di molti fattori, si può moltiplicarlo successivamente per questi diversi fattori.*

Sia da moltiplicare il numero 13 pel prodotto $2\times3\times5$, che è uguale a 30; si ha

$$13\times30=30\times13.$$

Nel prodotto 30×13, si può rimpiazzare 30 con $2\times3\times5$; giacchè, per definizione, per effettuare $2\times3\times5\times13$, bisognerà dapprima formare il prodot-

to $2\times3\times5$ ovvero 30, e moltiplicarlo per 13; si ha dunque

$$30\times13=2\times3\times5\times13,$$

ovvero, cambiando l'ordine dei fattori nel secondo membro,

$$30\times13=13\times2\times3\times5:$$

ciò che bisognava dimostrare.

41. OSSERVAZIONE I. *Per moltiplicare un prodotto per un numero, basta moltiplicare uno dei suoi fattori per questo numero.* Abbiamo veduto in effetto che

$$(2\times3\times5)\times13=13\times2\times3\times5.$$

Ma il secondo membro può scriversi

$$(13\times2)\times3\times5,$$

e, per conseguenza, per moltiplicare il prodotto $2\times3\times5$ per 13, è stato sufficiente moltiplicare uno dei suoi fattori per 13.

42. OSSEVAZIONE II. *Si può moltiplicare un prodotto per un altro prodotto, formando un prodotto unico coi fattori del moltiplicando e quelli del moltiplicatore.*

Sia da moltiplicare $5\times7\times4$ per $8\times5\times3$.

Per moltiplicare un numero pel prodotto $8\times5\times3$, basta (40) moltiplicarlo successivamente per ciascuno dei fattori di questo prodotto, si ha dunque

$$(5\times7\times4)\times(8\times5\times3)=(5\times7\times4)\times8\times5\times3,$$

la parentesi nel secondo membro non mutando in nulla le operazioni indicate, si può sopprimerla e scrivere

$$(5\times7\times4)\times(8\times5\times3)=5\times7\times4\times8\times5\times3,$$

ciò che bisognava dimostrare.

—

La dimostrazione precedente è fondata su ciò che l'espressione $(5\times7\times4)\times8\times5\times3$ ha assolutamente lo stesso significato avanti e dopo la soppressione della parentesi; non sarà inutile insistere su questo particolare.

$$(5\times7\times4)\times8\times5\times3$$

significa il prodotto effettuato, $5\times7\times4$, moltiplicato per 8, poscia il resultato per 5, poscia infine il resultato per 3.

$$5\times7\times4\times8\times5\times3,$$

significa, 5 moltiplicato per 7, il resultato moltiplicato per 4 (ciò che dà il prodotto $5\times7\times4$), poscia il resultato per 8, poi il nuovo resultato per 5, e infine l'ultimo resultato per 4. Si vede che le due operazioni sono identicamente le stesse.

43. Osservazione III. *In un prodotto si può rimpiazzare un numero qualunque di fattori pel loro prodotto effettuato.*

L'ordine dei fattori potendo essere qualunque, supponiamo che quelli di cui si tratta siano i primi: allora è evidente che le operazioni da fare non mutano rimpiazzando questi fattori pel loro prodotto effettuato. Così, per esempio, sostituendo al prodotto $5\times7\times9\times13\times11$ l'altro $315\times13\times11$, (315 è uguale a $5\times7\times9$), non si altera in verun conto l'operazione da eseguire. Giacchè per effettuare il prodotto proposto fa d'uopo per definizione, moltiplicare 5 per 7, poi il prodotto per 9, ciò che dà 315; poscia questo numero 315 si deve moltiplicare per 13 e il risultato per 11; operazione che equivale a quella di formare il prodotto $315\times13\times11$.

44. Osservazione IV. *Per moltiplicare due potenze di uno stesso numero, è sufficiente aggiungere i loro esponenti.*

Si debba moltiplicare 2^3 per 2^4, cioè a dire $2\times2\times2$ per $2\times2\times2\times2$; per quest'oggetto basterà (OSSERVAZIONE II) formare un prodotto unico coi fattori del moltiplicando e quelli del moltiplicatore. Ora questo prodotto è $2\times2\times2\times2\times2\times2\times2$ ovvero 2^7.

45. OSSERVAZIONE V. *Per moltiplicare due numeri terminati da zeri, si possono sopprimere questi zeri, far poscia la moltiplicazione e aggiungere alla destra del prodotto tanti zeri quanti ne contengono i due fattori.*

Sia da moltiplicare 378000 per 2700 cioè a dire 378×10^3 per 27×10^2, si ha,

$$(378\times10^3)\times(27\times10^2)=378\times10^3\times27\times10^2$$
$$=378\times27\times10^3\times10^2=378\times27\times10^5$$

10^5 essendo eguale a 100,000 si vede (33) che per formare il prodotto richiesto, è sufficiente moltiplicare 378 per 27 ed aggiungere 5 zeri al resultato.

Moltiplicazione di una somma per una somma.

46. Sia da moltiplicare $9+4$ per $7+5$. Bisogna ripetere il moltiplicando $7+5$ volte, ciò che può farsi ripetendolo 7 volte, poi 5 volte, e aggiungendo i resultati. Ma per moltiplicare una somma $9+4$, basta moltiplicare ciascuna delle sue parti (30); dunque il prodotto richiesto si compone di 7 volte 9, più 7 volte 4, più 5 volte 9, più 5 volte 5, ciò che scrivesi così

$$(9+4)\times(7+5)=9\times7+4\times7+9\times5+4\times5.$$

Quindi, *per moltiplicare una somma per una somma, fa d'uopo moltiplicare ciascuna delle parti del moltiplicando per ciascuna delle parti del moltiplicatore e aggiungere i resultati.*

Moltiplicazione di una differenza per un numero qualunque.

47. Proponiamoci di moltiplicare la differenza 17—4 per 5; ciò è lo stesso (32) che moltiplicare 5 per 17—4. Ma per questo oggetto, basta ripeterlo 17 volte, poi 4 volte, e togliere i resultati; quindi

$$(17-4)\times5=17\times5-4\times5;$$

dunque, *per moltiplicare una differenza per un numero qualunque, basta moltiplicare i suoi due termini per questo numero.*

APPLICAZIONE. Sia da moltiplicare 7997 per 8, si ha

$$7997=8000-3.$$

Per conseguenza

$$7997\times8=(8000-3)\times8=64000-24=63976.$$

47*. Questo teorema può dimostrarsi ancora nel seguente modo.

È chiaro che

$$5\times(17-4)=5\times13.$$

Ora si ha

$$5\times17=5\times(13+4)=5\times13+5\times4;$$

ma da due numeri eguali si può togliere uno stesso numero senza che si alteri l'eguaglianza; quindi togliendo dai due membri dell'ultima eguaglianza 5×4, avremo

$$5\times17-5\times4=5\times13=5\times(17-4).$$

E in generale, facendo $b-c=d$, si ha

$$a\times(b-c)=a\times d,$$

e

$$a\times b=a\times d+a\times c;$$

da cui

$$a\times b - a\times c = a\times d = a\times(b-c).$$

47**. In virtù di quest' ultimo teorema e dei principj fondamentali della moltiplicazione (30, 31), si vede che all' espressione

$$5\times9-5\times6+5\times12-5\times7$$

si può dare l' altra forma, sovente più utile,

$$5\times(9-6+12-7).$$

Infatti quest' ultima espressione può scriversi ancora nel seguente modo

$$5\times(9+12-6-7)=5\times[(9+12)-(6+7)];$$

ho scritto (9+12) e (6+7) per significare che bisogna fare prima la somma di 9 e 12, poi la somma di 6 e 7, e quindi sottrarre dalla prima somma la seconda.

Ora per l' ultimo teorema si ha

$$5\times[(9+12)-(6+7)] = 5\times(9+12)-5\times(6+7) =$$
$$= 5\times9+5\times12-5\times6-5\times7,$$

risultato affatto identico all' espressione proposta.

Numero delle cifre di un prodotto.

48. Teorema III. *Il numero delle cifre di un prodotto di due fattori è uguale alla somma del numero delle cifre del moltiplicando e del numero delle cifre del moltiplicatore od a questa somma diminuita di una unità.*

Supponiamo, per esempio, che il moltiplicatore abbia sei cifre. Esso è per lo meno eguale all' unità seguita da cinque zeri e minore dell' unità seguita da sei zeri. Il prodotto è dunque almeno eguale (33) al moltiplicando seguito da cinque zeri, e minore del moltiplicando se-

guito da sei zeri; esso ha per conseguenza un numero di cifre maggiore di quello del moltiplicando di cinque almeno e di sei al più.

48*. ***L' ordine delle unità del prodotto è lo stesso che quello delle unità del moltiplicando.***

Infatti si ha

$$2400 \times 3 = 24 \times 100 \times 3 = 24 \times 3 \times 100 = 72 \times 100;$$

dunque il moltiplicando 24 centinaia ripetuto 3 volte, dà per prodotto 72 centinaia.

Metodo abbreviato per fare la moltiplicazione.

49. Per moltiplicare due numeri si fa spesso uso di un processo che permette di scrivere immediatamente il prodotto definitivo, senza formare i prodotti parziali intermedi.

Abbiasi per esempio da moltiplicare 375 per 286; bisogna, secondo la regola esposta innanzi, moltiplicare successivamente il moliplicando per 6, per 80, e per 200, e, per quest' oggetto, si debbono moltiplicare successivamente per ciascuno di questi tre numeri, le tre parti 300, 70 e 5 di cui si compone il moltiplicando. Quindi bisogna eseguire, in tutto, nove moltiplicazioni parziali, cioè, quelle dei tre moltiplicandi 300, 70 e 5, pei tre moltiplicatori 200, 80, 6. A tal fine basterà (45) moltiplicare 3, 7 e 5 per 2, 8 e 6, scrivendo alla destra di ciascun prodotto, tanti zeri quanti ve ne dovevano essere dopo i due fattori moltiplicati, cioè a dire, un numero di zeri eguale al numero delle cifre poste innanzi ad essi nei due numeri proposti. Giovandosi di quest' osservazione è molto facile formare successivamente i prodotti che rappresentano unità semplici, quelli che rap-

presentano decine, quelli che rappresentano centinaia, ec., e di aggiungerli a misura che si ottengono. Così nell' esempio che consideriamo:

$$\begin{array}{r} 375 \\ 286 \\ \hline 107250 \end{array}$$

è chiaro che tra i nove prodotti che dobbiamo formare, un solo può rappresentare unità semplici, ed è quello delle unità del moltiplicando per le unità del moltiplicatore. 6 volte 5 fanno 30. La cifra delle unità del prodotto è dunque 0 e dobbiamo riportare tre decine. Due dei prodotti parziali rappresentano decine, e sono le unità moltiplicate per le decine, e le decine moltiplicate per le unità. 7 volte 6, 42; 8 volte 5, 40; 40 e 42 fanno 82 e 3 decine che sono state riportate 85 decine, la cifra delle decine è dunque 5, e si debbono riportare 8 centinaia.

Tre dei prodotti parziali rappresentano centinaia, e sono le unità moltiplicate per le centinaia, le decine per le decine e le centinaia per le unità. 6 volte 3 fanno 18; 8 volte 7, 56; 2 volte 5, 10; 10, 56 e 18 fanno 84 e 8 centinaia riportate 92. Dunque la cifra delle centinaia è 2, e fa d' uopo riportare 9 migliaia.

Due dei prodotti parziali rappresentano migliaia, e sono le decine moltiplicate per le centinaia e le centinaia moltiplicate per le decine. 8 volte 3 fanno 24, 2 volte 7 fanno 14; 14 e 24 fanno 38 e 9 riportate 47, dunque la cifra delle migliaia è 7, e bisogna riportare 4 decine di migliaia.

Un solo prodotto dà decine di migliaia, ed è quello delle centinaia per le centinaia. 2 volte 3 fanno 6, e 4 riportate 10, quindi la cifra delle decine di migliaia è 0, e resta un centinaio di migliaia.

OSSERVAZIONE. È sempre agevole trovare tutti i prodotti che rappresentano unità di un dato ordine. A quest'oggetto si comincierà dal cercare quello tra essi che corrisponde alle unità le più elevate nel moltiplicando; tutte le altre si otterranno poscia osservando che l'ordine delle unità rappresentate dal prodotto non muta avanzando ad una volta, di un posto verso la destra nel moltiplicando e di un posto verso la sinistra nel moltiplicatore.

Sia, per esempio, da moltiplicare 783214 per 291573; cerchiamo i prodotti parziali che rappresentano decine di milioni. Le unità più elevate del moltiplicando sono centinaia di migliaia; per avere decine di milioni, fa d'uopo moltiplicarle per centinaia; quindi il primo dei prodotti domandati è 5×7. Gli altri sono $1 \times 8, 9 \times 3, 2 \times 2$; e la loro somma $35+8+27+4$ è uguale a 74. Però non bisogna conchiudere che, nel prodotto, la cifra delle decine di milioni sia 4, giacchè i milioni hanno dato delle altre decine.

Cerchiamo ancora i prodotti parziali che, nella moltiplicazione proposta, danno delle decine di migliaia; quello fra questi prodotti che corrisponde alle più alte unità possibili del moltiplicando, è il prodotto delle decine di migliaia del moltiplicando per le unità del moltiplicatore, cioè a dire, 8×3, gli altri sono 3×7, 2×5, 1×1, 4×9.

Esercizi.

I. In Francia il consumo medio annuale per abitante, è di 167 litri di grano, 69 litri di vino, 21879 grammi di carne, 6525 grammi di sale e 3648 grammi di zucchero.

Dedurre da queste cifre il consumo totale, supponendo il numero degli abitanti di 34230178.

II. Un numero terminato da 5, ha il suo quadrato terminato da 25.

III. La differenza delle quarte potenze di due numeri non terminati nè da 0 nè da 5, termina con una di queste due cifre.

IV. Il prodotto di due numeri, compresi tra 5 e 10, si può trovare nel modo seguente: Chiudere nella mano sinistra tante dita quante unità mancano al moltiplicando perchè risulti uguale a 10, e nella mano destra tante quante ne mancano al moltiplicatore; fare il prodotto di questi due numeri di dita, e aggiungerli tante decine quante dita sono rimaste non chiuse.

V. Date due serie di numeri, che ne contengano tanto l'una quanto l'altra, in quale ordine fa d'uopo disporle perchè la somma dei prodotti ottenuti, moltiplicando i numeri corrispondenti, sia la maggiore possibile?

VI. Si prenda un numero qualunque di cifre. Si raddoppi la prima, si aggiunga 5 al risultato, e si moltiplichi la somma per 5; al prodotto così ottenuto si aggiunga la seconda cifra, poscia si moltiplichi per 10; si aggiunga al prodotto la terza cifra, si moltiplichi ancora per 10 e si aggiunga la quarta; così di seguito indefinitamente. Provare che il risultato così ottenuto, diminuito di 25 o di 250, o di 2500 ......, secondo il numero delle cifre date, sarà uguale al numero formato da queste cifre, scritte nell'ordine nel quale erano state poste.

VII. A —— R —— S —— B

Si segnino sopra una retta AB due punti R e S, e si misuri questa linea e le sue differenti parti: provare che si avrà sempre

$$(AB)\times(RS)+(AR)\times(BS)=(AS)\times(BR),$$

(AB), (RS), (AR), (BS), (AS), (BR), indicando i numeri che misurano queste differenti linee.

ESEMPIO. $AB=100$, $AR=20$, $BS=10$, $RS=70$.

$$100\times70+20\times10=90\times80.$$

VIII. Il prodotto della somma di due numeri per la loro differenza è uguale alla differenza dei loro quadrati.

IX. Dedurre dal teorema precedente che, data la somma di due numeri, il loro prodotto è il massimo possibile quando sono eguali.

X. Dato il prodotto di due numeri, la loro somma è la minima possibile se sono eguali: mostrare l'identità di questa proposizione con la precedente.

XI. La somma dei quadrati di due numeri è maggiore del doppio del loro prodotto.

XII. Il prodotto dei numeri interi dopo un limite qualunque n, sino al numero $2n-2$ inferiore di due unità al doppio di n, è uguale al prodotto dei numeri impari da 1 sino a $2n-3$, per la potenza $(n-1)^{esima}$ di 2.

XIII. Qual'è il valore del rame prodotto in Francia durante l'anno 1847, sapendo che il quintale di rame vale 211 franchi, e che si sono fabbricati 312 quintali con minerali indigeni e 6108 con minerali stranieri?

XIV. In Francia si sono fabbricati, nel 1847, 1874111 quintali di ferro fuso negli alti fornelli al coke. Quali sono stati il peso e il valore del coke bruciato, sapendo che si consumano 171 chilogrammi di coke per quintale di ferro fuso ottenuto, e che il prezzo medio di cento chilogrammi di coke è di 245 centesimi?

CAPITOLO IV.

DIVISIONE DEI NUMERI INTERI.

Definizioni.

50. La parola *divisione* esprime letteralmente riduzione in più parti. Dividere una grandezza per un numero intero vale lo stesso che decomporla in tante parti eguali, quante unità vi sono in questo numero, e valutare una di queste parti. In aritmetica, la grandezza da dividere è rappresentata da un numero che, in questo capitolo, supporremo intero; questo numero si chiama *dividendo;* quello che esprime in quante parti eguali si divide, chiamasi *divisore,* e il valore di una delle parti dicesi *quoziente.* L' oggetto della divisione è di trovare il quoziente, dati che siano il dividendo e il divisore.

La divisione s'indica col segno :

Esempio. 8:3, si legge, 8 diviso per 3.

51. Non sempre è possibile trovare un quoziente intero; in questo caso ci limiteremo, per ora, a cercare il più gran numero intero che vi è contenuto, rinviando la sua valutazione esatta alla teorica delle frazioni. Se si considera questa parte intera del quoziente come ottenuta dal dividere una parte del dividendo, il *resto* è la parte non divisa. Per esempio, nella divisione di 10 per 4, la parte intera del quoziente, che è 2, potendosi considerarè come ottenuto dalla divisione di 8 per 4, ne segue che il *resto* è due unità.

52. Osservazione I. *Il resto di una divisione è sempre minore del divisore,* giacchè, se ciò non fosse,

dividendolo per questo divisore, si otterrebbe almeno una nuova unità da aggiungere alla parte intera del quoziente. Così, non sarebbe conforme alle definizioni precedenti dire che 18 diviso per 5 dà per quoziente 2 e per resto 8 unità; giacchè 5 di queste 8 unità, divise per 5, danno per quoziente un' unità che fa d' uopo aggiungere alle altre due: si deve dire dunque che il quoziente è 3 ed il resto 3.

53. Osservazione II. La riduzione di una grandezza in parti eguali non è il solo genere di quistioni che conduca a fare delle divisioni. Questa operazione si presenta anche quando, per confrontare due grandezze, si cerca quante volte l' una contiene l' altra; allorchè le due grandezze sono espresse mediante numeri, è facile mostrare che questo paragone torna alla divisione di due numeri.

Siano i numeri 46 e 7. Il quoziente della loro divisione è 6, e il resto 4, cioè a dire che 46 si compone di un numero che contiene sette parti eguali a 6, e di 4 unità. Ma un numero che contiene sette parti eguali a 6, è uguale a sette volte sei o (32) a sei volte sette; quindi 46 contiene sei volte il divisore 7, e inoltre 4 unità; in guisa che cercando quante volte 46 contiene 7, si troverà lo stesso numero intero 6, che prendendo il settimo di 46, e resterà la stessa parte del dividendo, eguale a 4 unità, di cui la divisione non può effettuarsi in numeri interi.

Quest' osservazione prova che si può considerare la divisione come avente per oggetto di cercare quante volte il dividendo contiene il divisore; il *resto* è allora ciò che rimane del dividendo, quando se n' è tolto il divisore tante volte quanto è possibile. Da ciò risulta, *che il prodotto del divisore per la parte intera del quoziente è il massimo multiplo del divisore che sia contenuto nel dividendo.*

Osservazione. Se la lunghezza dei calcoli non fosse un ostacolo, il quoziente della divisione di due numeri si otterrebbe facilmente mercè le operazioni precedenti.

Abbiasi da dividere 28 per 8; il quoziente può ottenersi in tre modi:

1° Mediante l'addizione. Aggiungendo 8 a sè stesso si riconosce che $8+8+8=24$, e $8+8+8+8=32$; 28 contiene quindi 8 più di 3 volte, e meno di 4 volte. Il quoziente che si cerca è per conseguenza 3, e il resto è 4 eccesso di 28 sopra 24.

2° Mediante la sottrazione. Togliendo 8 da 28 tante volte quant'è possibile, si riconosce che vi è contenuto soltanto 3 volte.

$$28-8=20,\ 20-8=12,\ 12-8=4.$$

28 contiene quindi 3 volte 8, e il resto 4.

3° Mediante la moltiplicazione. Moltiplicando successivamente 8 pei numeri 1, 2, 3, ec.; si trovano per prodotti, 8, 16, 24, 32. Il più grande di questi numeri che sia contenuto in 28 è 24 o 3 volte 8; il quoziente è per conseguenza 3.

Quindi l'oggetto di questo capitolo non è solamente di dare un processo per effettuare la divisione, ma di far conoscere una regola comoda e pratica.

54. Da ciò che precede apparisce che è sempre facile decidere se il quoziente di due dati numeri è maggiore o minore di un terzo numero.

Siano i numeri 63724 e 453:

Cerchiamo se il quoziente della loro divisione supera 135. Si tratta di sapere se 63724 contiene più o meno di 135 volte il divisore 453; cioè a dire, se il dividendo è maggiore o minore di 453×135; effettuando il prodotto si trova

$$453\times135=61155;$$

ma 63724 supera 61155, quindi il quoziente è maggiore di 135. Si vede anche che 135 non è la sua parte intera, giacchè l'eccesso di 63724 sopra 61155 è 2569 che contiene ancora molte volte 453.

Caso semplice della divisione.

55. Per fare una divisione qualunque, è utile saper risolvere la quistione seguente:

Trovare la parte intera del quoziente di una divisione quando questa parte intera ha una sola cifra.

Distingueremo tre casi:

1° *Il divisore ha una sola cifra.*

La tavola di moltiplicazione insegna, in questo caso, qual'è il massimo multiplo del divisore che è contenuto nel dividendo, e, per conseguenza (53), fa conoscere la parte intera del quoziente.

Esempio. 77 diviso per 9 dà per quoziente 8, giacchè il massimo multiplo di 9 contenuto in 77, è 72 ovvero 9×8. Il resto è 5.

2° *Il divisore è composto di una cifra seguita da molti zeri.*

Debbasi, per esempio, dividere 37857 per 5000. Il dividendo si compone di 37 migliaia e di 857 unità; ora questa seconda parte non contiene migliaia, quindi il quoziente della divisione di 37857 per 5000 non può provenire che dalla divisione delle 37 migliaia del dividendo per le 5 migliaia del divisore, o, ciò ch'è lo stesso, di 37 per 5. Quindi potremo dire in generale: *Quando il divisore è composto di una cifra seguita da molti zeri, per trovare la parte intera del quoziente, si possono sopprimere questi zeri, ed un egual numero di cifre del dividendo.*

Esempio. Sia da dividere 783217 per 90000, la

parte intera del quoziente è la stessa di quella del quoziente di 78 per 9, e per conseguenza, eguale a 8.

3° *Il divisore è un numero qualunque.*

Dalla semplice ispezione del dividendo e del divisore si desume agevolmente, se il quoziente è minore di 10; giacchè per questo oggetto, è necessario e sufficiente che il dividendo non contenga 10 volte il divisore, cioè a dire che sia minore del risultato ottenuto, scrivendo uno zero alla destra del divisore.

Esempio. 37892 diviso per 3814, darà un quoziente minore di 10, giacchè 37892 è minore di 38140.

Poichè il quoziente deve essere minore di 10, si potrebbe trovarlo moltiplicando il divisore pei numeri 1, 2, 3, 4, ec.; e fermandosi tosto che due prodotti comprendessero tra loro il dividendo; sia per esempio da dividere 117 per 23, si ha

$$1\times23=23$$
$$2\times23=46$$
$$3\times23=69$$
$$4\times23=92$$
$$5\times23=115$$
$$6\times23=138,$$

117 è dunque compreso tra 5 volte 23 e 6 volte 23, e per conseguenza (52), il quoziente richiesto ha 5 per parte intera.

Questo processo non sarà mai troppo lungo, poichè si dovranno fare al più 9 piccole moltiplicazioni; tuttavia è utile abbreviarlo. Ciò si ottiene giovandosi della seguente osservazione.

La cifra che più influisce sul valore del divisore è la prima alla sua sinistra. Se dunque si sostituiscono tutte le altre con zeri, si avrà un quoziente che poco differisce dal vero e molto facile ad ottenere.

Questo primo valore approssimato del quoziente, può essere maggiore ma non minore del vero. Giacchè, sostituendo degli zeri a tutte le cifre del divisore, eccettuata la prima, si diminuisce quest'ultimo e si aumenta evidentemente il quoziente, in guisa che la parte intera può qualche volta restare la stessa, ma non può, in niun modo, aumentare. Alcuni tentativi permetteranno in ciascun caso di trovare se la cifra ottenuta è maggiore, e quante unità fa d'uopo toglierle.

Esempio. Si debba dividere 4573 per 782; si dividerà dapprima 4573 per 700. La parte intera del quoziente è la medesima (55, 2°) di quella della divisione di 45 per 7, ed è quindi eguale a 6. Dunque la parte intera del quoziente cercato è uguale o minore di 6; per sperimentare questa cifra 6, si moltiplicherà il divisore pei numeri 6, 5, 4, ..., sino a che si trovi un prodotto che sia contenuto nel dividendo. 782 moltiplicato per 6 dà per prodotto 4692 che è maggiore del dividendo. Ma il prodotto per 5 è 3910, minore di 4573, dunque il dividendo contiene 5 volte il divisore, ma non lo contiene 6 volte, e la parte intera del quoziente è per conse guenza uguale a 5.

56. Osservazione. Sostituendo tutte le cifre del divisore, eccettuata la prima, con zeri, si ottiene un limite superiore del quoziente: in un modo analogo può ottenersi un limite inferiore. Riprendiamo in effetto l'esempio precedente. Invece di sostituire 700 al divisore 782, gli si sostituisca 800; la parte intera del quoziente della divisione di 4573 per 800 è la stessa (55, 2°) di quella della divisione di 45 per 8, ed è quindi eguale a 5; ma sostituendo 800 al divisore, abbiamo aumentato il suo valore, e per conseguenza diminuito quello del quoziente; dunque la parte intera di quest'ultimo non può essere minore di 5, cioè a dire che è 5 *almeno*.

Talune volte l'osservazione precedente permette di determinare esattamente la parte intera del quoziente. Sia per esempio da dividere 6378 per 875; sostituendo 800 al divisore, la parte intera del quoziente è (55, 2°) la medesima di quella della divisione di 63 per 8, ch'è 7; dunque la parte intera del quoziente cercato è 7 *al più*. Sostituendo 900 al divisore, la parte intera del quoziente è la stessa di quella della divisione di 63 per 9, cioè a dire ancora uguale a 7; la parte intera del quoziente cercato è dunque 7 *almeno*. Non potendo essere nè maggiore nè minore di 7, dev'essere necessariamente 7.

Divisione di due numeri interi qualunque.

57. Allorquando il quoziente e maggiore di 10, si comporrà di più cifre che fa d'uopo trovare successivamente.

La ricerca della prima cifra si risolve nelle due quistioni seguenti: 1° Cercare l'ordine delle unità rappresentate dalla prima cifra del quoziente, 2° cercare il valore di questa prima cifra.

Debbasi dividere 8593214 per 247.

Per trovare l'ordine delle unità più elevate del quoziente, separiamo alla sinistra del dividendo tante cifre quante sono necessarie per formare un numero compreso fra il divisore e il suo decuplo. Questo numero, che nel caso attuale sarà 859, rappresentando decine di migliaia, dico che la prima cifra del quoziente rappresenterà anche decine di migliaia, o in altri termini, che il quoziente è maggiore di diecimila, e minore di centomila.

1° Il quoziente è maggiore di 10000, giacchè il dividendo contenendo 859 decine di migliaia, è maggiore di 247 decine di migliaia, cioè a dire di diecimila volte il divisore.

2° Il quoziente è minore di 100000, giacchè il dividendo contenendo solamente 85 centinaia di migliaia, è minore 247 centinaia di migliaia, cioè a dire di centomila volte il divisore.

Questo ragionamento è evidentemente generale, e conduce alla regola seguente:

Separando alla sinistra del dividendo tante cifre quante sono necessarie per formare un numero maggiore del divisore e minore del suo decuplo, la prima cifra del quoziente rappresenta unità del medesimo ordine del numero formato da queste cifre.

58. Adesso bisogna trovare il valore della prima cifra del quoziente, che sappiamo rappresentare decine di migliaia.

La questione da risolvere è la seguente:

Quante decine di migliaia vi sono nel quoziente della divisione di 8593214 per 247? Ovvero ancora, che è lo stesso (53), qual'è il massimo numero di decine di migliaia che moltiplicato per 247, dia un prodotto inferiore a 8593214? Il prodotto di un numero di decine di migliaia per 247 non potendo dare che decine di migliaia, è chiaro che le cifre 3214 che rappresentano unità d'ordine inferiore non hanno alcuna influenza sul prodotto in questione, che dev'essere tutto al più eguale a 859 decine di migliaia. Dunque la prima cifra del quoziente, è il massimo numero che moltiplicato per 247 dà un prodotto inferiore o uguale a 859; per conseguenza (53) esso è la parte intera del quoziente della divisione di 859 per 247.

Il ragionamento è evidentemente generale e conduce alla regola seguente:

La prima cifra del quoziente è data dalla divisione del numero che si è separato alla sinistra del dividendo pel divisore.

Dividendo 859 per 247, come si è detto (55), si trova 3 per quoziente. Dunque il quoziente cercato contiene 3 decine di migliaia.

59. OSSERVAZIONE. Il numero 859 che si separa alla sinistra del dividendo, per dividerlo pel divisore, si chiama dividendo parziale. Un dividendo parziale è sempre maggiore del divisore e minore del suo decuplo; e può avere tante cifre quante ne ha il divisore, o una di più.

60. Il dividendo può considerarsi come composto di 741 decine di migliaia, prodotto di 247 per 3 decine di migliaia, e dell'eccesso del dividendo sopra questo numero. Le 3 decine di migliaia che abbiamo trovate innanzi, rappresentano il quoziente della divisione di 741 decine di migliaia per 247; se dunque togliamo da 8593214, 741 decine di migliaia, dividendo il resto per 247, si otterrà il numero che deve completare il quoziente, cioè a dire, il numero formato dall'insieme delle cifre ancora ignote.

Il ragionamento è evidentemente generale e conduce alla regola seguente:

Moltiplicando il divisore pel numero che rappresenta la prima cifra del quoziente, e togliendo il prodotto dal dividendo, il resto di questa sottrazione diviso pel divisore darà l' insieme delle altre cifre del quoziente.

OSSERVAZIONE. Per moltiplicare 247 per 30000, basta evidentemente moltiplicarlo per tre, e scrivere quattro zeri alla destra del prodotto; quindi la sottrazione si farà togliendo 247 moltiplicato per 3 decine di migliaia, o 741 decine di migliaia, dalle 859 decine di migliaia del dividendo, e scrivendo, in seguito al resto, le altre cifre del dividendo.

Togliere da 859 il prodotto di 247 per 3, significa cercare il resto della divisione di 859 per 247, che ha

somministrata la prima cifra del quoziente; dunque bisogna scrivere alla destra del resto di questa divisione le ultime cifre del dividendo.

Il numero così ottenuto, diviso pel divisore, darà l'insieme delle altre cifre del quoziente.

61. I teoremi precedenti permettono di effettuare una divisione qualunque, giacchè danno il mezzo di trovare la prima cifra del quoziente e riducono la ricerca di tutte le altre ad una nuova divisione. Applicandoli a questa seconda divisione, si troverà una seconda cifra del quoziente, e si ridurrà la ricerca di tutte le altre ad una terza divisione; quest'ultima darà una terza cifra del quoziente ec. Dunque siamo condotti alla regola seguente:

1° *Per dividere l'uno per l'altro due numeri interi, si separano alla sinistra del dividendo tante cifre quante sono necessarie per formare un numero maggiore del divisore ma minore del suo decuplo; dividendo questo numero pel divisore, si ottiene la prima cifra del quoziente, che rappresenta unità dello stesso ordine di questo primo dividendo parziale.*

Questa prima parte della regola, risulta dai teoremi dimostrati (57, 58).

2° *Si calcola il resto della divisione che ha fornito la prima cifra del quoziente, e si scrivono alla sua destra le altre cifre del dividendo; il numero così formato, diviso pel divisore, darà le altre cifre del quoziente.*

Questa seconda parte della regola risulta dal teorema dimostrato (60).

3° *Applicando a questa nuova divisione le regole enunciate, si otterrà la prima cifra del nuovo quoziente che è, in generale, la seconda del quoziente cercato, le altre saranno date da una terza divisione.*

Questa terza parte della regola non ha bisogno di dimostrazione.

La cifra fornita da questa nuova divisione sarà la seconda allora soltanto quando le unità che esprime sono di un ordine immediatamente inferiore a quello che rappresenta la prima cifra; quando ciò non avvenisse, bisognerebbe porre tra esse uno o molti zeri. Questa circostanza si presenterà quando, per formare il secondo dividendo parziale, facesse d'uopo aggiungere più di una nuova cifra alla differenza fra il primo dividendo parziale e il prodotto del divisore per la prima cifra del quoziente. È chiaro in effetto, che in questo caso le unità espresse dal secondo dividendo parziale, non saranno di un ordine immediatamente inferiore a quelle che rappresenta il primo.

4°. *Si continua a questo modo sino a che si ottenga un dividendo minore del divisore; questo dividendo è il resto dell' operazione.*

Giacchè questo dividendo diviso pel divisore non darebbe una sola nuova unità da aggiungere al quoziente; esso sarà dunque il resto. Se l' ultima cifra ottenuta non esprimesse unità semplici, bisognerebbe scrivere alla sua destra uno o più zeri, per farle acquistare il valore che deve avere.

Maniera di disporre l' operazione.

62. Per fare una divisione si scrivono il dividendo e il divisore sopra una medesima linea orizzontale, si separano mediante una linea verticale, e si tira una linea sotto il divisore. Ciò fatto, si separa con una virgola il primo dividendo parziale, e si scrive provvisoriamente, come prima cifra del quoziente, il resultato approssimato ottenuto nel modo detto innanzi (55). Si

moltiplica questa prima cifra pel divisore, e si toglie il prodotto dal primo dividendo parziale. Se questa sottrazione non può effettuarsi, si diminuisce la cifra scritta al quoziente sino a che il suo prodotto pel divisore sia minore del dividendo parziale; si fa allora la sottrazione senza scrivere il prodotto medesimo, togliendo le sue diverse cifre a misura che si ottengono. Alla destra del resto si scrive la prima delle cifre del dividendo non impiegate, o, se ciò è necessario, le due prime, le tre prime, ... cifre non ancora adoperate, in modo da formare un secondo dividendo parziale del divisore. Questo dividendo parziale diviso pel divisore dà una seconda cifra del quoziente. Si continua al modo stesso sino a che si ottenga un dividendo parziale, minore del divisore e che esprima unità semplici.

I calcoli della divisione di 8593214 per 247, si fanno nel modo seguente:

```
8593214 | 247
1183    |-----
 1952   | 34790
  2231
     84
```

Si separa alla sinistra del dividendo il numero 859 maggiore del divisore, e si divide per 247. Secondo la regola (55) bisognerebbe provare la cifra 4, ma si riconosce a prima vista che è troppo grande; si scrive dunque 3 al quoziente. Si moltiplica 3 per 247 e si toglie il prodotto da 859, il resto è 118. Alla sua destra si scrive la prima delle rimanenti cifre del dividendo, e si forma il dividendo parziale 1183 che fa d'uopo dividere per 247. Dividendo 11 per 2, si ha per quoziente 5, ma si vede che il prodotto di 247 per 5 non può togliersi da 1183; dunque 5 è troppo grande, e bisogna provar 4. Togliendo

da 1183 il prodotto di 247 per 4, si trova per resto 195; alla sua destra si scrive la prima delle rimanenti cifre del dividendo, e si forma il dividendo parziale 1952, che bisogna dividere per 247. Dividendo 19 per 2 si ha per quoziente 9; quindi bisognerebbe (55) provare la cifra 9, ma è facile vedere che è troppo grande, e che lo stesso accade della cifra 8. Si toglie dunque da 1952 il prodotto di 247 per 7, il resto è 233; alla sua destra si scrive la prima delle rimanenti cifre del dividendo, e si forma il dividendo parziale 2231 ch' è mestieri dividere per 247. Il 2 è contenuto 11 volte nel 22; quindi siamo condotti a porre nel quoziente la cifra 9 che è la vera, giacchè il suo prodotto per 247 può togliersi da 223, e lascia per resto 8. Alla destra di questo resto si scrive l' ultima cifra del dividendo, e si forma così il dividendo parziale 84 che non può dividersi per 247, ed è per conseguenza il *resto* dell' operazione; ma fa d' uopo porre uno zero alla destra della cifra 9, perchè questa cifra rappresenta decine come il dividendo parziale 2231 da cui proviene.

Consideriamo ancora l' esempio seguente nel quale il quoziente contiene molte volte la cifra 0.

Sia da dividersi 1054854 per 351.

```
1054854 | 351
   1854 |3005
     99 |
```

Si separa alla sinistra del dividendo il numero 1054 maggiore del divisore, e si divide per 351. Il quoziente (55) non può superare il quoziente della divisione di 10 per 3, cioè a dire 3; proviamo dunque la cifra 3: il prodotto di 3 per 351 è 1053, minore di 1054. La cifra 3 è dunque la vera e il resto di questa prima divisione parziale è 1, eccesso di 1054 su 1053. Alla destra

di 1 scrivo le cifre 854 del dividendo; e per ottenere un secondo dividendo parziale superiore a 351, debbo prendere tutto il numero 1854, il quale rappresentando unità semplici, mentre il dividendo precedente 1054 rappresenta migliaia, bisognerà porre due zeri nel quoziente tra le cifre date da queste divisioni. Per dividere 1854 per 351, si dividerà (55) 18 per 3, e si otterrà 6 per limite superiore del quoziente, poi dividendo 18 per 4 si otterrà 4 per limite inferiore del quoziente; dunque il quoziente è 4, 5 o 6. Il prodotto di 6 per 351 è 2106, numero superiore a 1854, 6 è dunque troppo grande. Il prodotto di 5 per 351 è 1755, numero minore di 1854, dunque la cifra 5 è la vera. Il quoziente cercato è dunque 3005, e il resto è 99, eccesso di 1854 su 1755.

63. Quando il quoziente di una divisione deve avere un gran numero di cifre, si rende l'operazione più facile e speditiva formando una tavola dei prodotti del divisore per i nove primi numeri.

Esempio. Debbasi dividere 31415926535897932З, per 3183098. L'operazione si dispone nel seguente modo:

```
314159265358979323 | 3183098
28647882           |----------
 27680445          | 9869607073
 25464784
  22156613
  19098588
   30580255
   28647882
    19323738
    19098588
      22515097
      22281686
        23341193
        22281686
         10595072
          9549294
          10457783
           9549294
            908489
```

1	3183098
2	6366196
3	9549294
4	12732392
5	15915490
6	19098588
7	22281686
8	25464784
9	28647882

Numero delle cifre del quoziente.

64. L'ordine delle unità rappresentate dalla prima cifra del quoziente essendo conosciuto sin dal principio dell'operazione, si saprà immediatamente in ogni caso particolare quante cifre deve avere il quoziente. Infatti è chiaro che avrà due cifre, se la sua prima cifra rappresenta decine, tre se rappresenta centinaia, ec. Ma vi ha in oltre una regola generale che è bene conoscere.

Il numero delle cifre del quoziente è la differenza tra il numero delle cifre del dividendo e il numero

delle cifre del divisore, o questa differenza aumentata di una unità.

La prima cifra del quoziente rappresenta infatti unità del medesimo ordine del primo dividendo parziale, quindi l' ultima cifra del dividendo parziale e la prima del quoziente saranno seguite da uno stesso numero di cifre.

Ora, il primo dividendo parziale può avere (59) tante cifre quante ne ha il divisore, o una di più. Nel primo caso il numero delle cifre che seguono il primo dividendo parziale, e per conseguenza, il numero di quelle che seguono la prima cifra del quoziente, è uguale alla differenza tra il numero della cifra del dividendo e il numero delle cifre del divisore; nel secondo caso è uguale a questa differenza diminuita di un' unità.

Il numero totale delle cifre del quoziente, *compresa la prima,* è dunque, nel primo caso, superiore di un' unità, e, nel secondo, eguale a questa differenza: ciò che è precisamente la proposizione enunciata.

Esempio. Sia da dividersi 3753821 per 457.

Il primo dividendo parziale essendo 3753, la prima cifra del quoziente esprimerà unità del medesimo ordine della cifra 3 del dividendo; essa sarà dunque seguita da tre cifre, ed il quoziente avrà per conseguenza quattro cifre.

Metodo per provare le cifre del quoziente.

65. Abbiam veduto che ciascuna cifra del quoziente si ottiene mediante una divisione parziale di cui il quoziente è minore di 10.

Per fare queste divisioni parziali si comincia (55, 56) dal cercare due limiti del quoziente, uno inferiore, l' altro superiore; e le cifre comprese tra questi limiti si

provano moltiplicandole pel divisore e cercando la maggiore di quelle che danno un prodotto inferiore al dividendo parziale. Vi ha un altro processo quasi sempre più agevole, che dichiareremo con un esempio.

Sia da dividere il dividendo parziale 1853 per 392. Il quoziente è (55) una delle tre cifre 6, 5 o 4. È 6 se 392 è minore della sesta parte di 1853. Ora la ricerca di questa sesta parte è facilissima, e si fa nel seguente modo. La sesta parte di 18, è 3 senza resto; la sesta parte di 5 è 0 con un avanzo di 5; qui è inutile continuare, giacchè il quoziente cominciando con 30, è minore di 392; quindi la cifra 6 è da rigettare. Il quoziente è 5, se 392 è minore della quinta parte di 1853; ora la quinta parte di 18 è 3, con un avanzo di 3, la quinta parte di 35 è 7; è inutile continuare perchè il quoziente cominciando con 37 è minore di 392. Dunque la cifra 5 è da rigettare; per conseguenza, 4 è la vera cifra del quoziente.

Prova della divisione.

66. *Per fare la prova di una divisione si moltiplica il divisore pel quoziente, e si aggiunge il resto a questo prodotto; la somma dev' essere eguale al dividendo.*

Supponiamo infatti che dividendo 7834 per 31, si sia trovato 252 per quoziente e 22 per resto; il dividendo deve contenere (45) una parte il cui 31° è 252, e inoltre un resto 22; dunque si deve avere

$$7834 = \textit{trenta e una volta } 252+22:$$

ed è questa la condizione necessaria e sufficiente perchè l' operazione sia esatta.

OSSERVAZIONE I. Indicando con A e B due numeri

qualunque, per esprimere che il quoziente della loro divisione è Q ed il resto R, è sufficiente scrivere

$$A = B \times Q + R,$$

ed aggiungere che R è minore di B.

OSSERVAZIONE II. Come la moltiplicazione serve di prova alla divisione, così la divisione può servire di prova alla moltiplicazione. Perchè una moltiplicazione sia esatta fa d'uopo infatti che il prodotto diviso pel moltiplicando dia per quoziente il moltiplicatore, e per resto zero. Se per esempio, 30 è eguale a 5 moltiplicato per 6, il quinto di 30 è evidentemente 6.

Teoremi relativi alla divisione.

67. TEOREMA I. *Quando si moltiplica il dividendo e il divisore di una divisione per un medesimo numero, il quoziente non cambia, ed il resto è moltiplicato per questo numero.*

752 diviso per 13 dà per quoziente 57 e per resto 11; bisogna provare che prendendo per dividendo 752×12 e per divisore 13×12, il quoziente sarà sempre 57 ed il resto 11×12.

Il resultato della prima divisione ci dice infatti che, 752 *unità* contengono 57 volte 13 *unità* ed inoltre 11 *unità*.

La parola unità esprime qui una quantità affatto arbitraria, che può essere una collezione di 12 oggetti o una *dozzina*, e per conseguenza, 752 *dozzine* contengono 57 volte 13 *dozzine* ed inoltre 11 *dozzine*.

Ora quest'ultima frase esprime che 12×752, diviso per 12×13, dà per quoziente 57, ed un resto 12×11 evidentemente minore del divisore. Ciò che bisognava

dimostrare. Il ragionamento è generale, e si potrebbe sostituire a 12 un moltiplicatore qualunque.

68*. Questo teorema può dimostrarsi anche in un altro modo. Si ha l' eguaglianza

$$752=13\times57+11;$$

due quantità uguali moltiplicate per una medesima quantità danno risultati uguali, quindi avremo

$$752\times12=12\times13\times57+11\times12.$$

Nel prodotto $12\times13\times57$, i fattori 12 e 13, possono essere sostituiti dal loro prodotto: dunque

$$752\times12=(12\times13)\times57+11\times12.$$

Ma 11 è il resto della divisione di 752 per 13; quindi il prodotto di 11 per 12 è minore del prodotto di 13 per 12; dunque dall' ultima eguaglianza risulta che 752×12 diviso per 13×72 dà per quoziente 57 e per resto 11×12.

Rappresentando con A e B i due numeri dati, con q il quoziente della loro divisione, con r il resto, con m un numero intero qualunque, il teorema precedente è espresso in generale dalla formola

$$m\times A=(m\times B)\times q+m\times r.$$

69*. T[illegible] [illegible] II. *Per dividere un* [illegible] *dotto per uno dei* [illegible] *ri, basta sopprimere* [illegible] *fattore.*

In [illegible] uoziente della divis[illegible] prodotto 5×7 [illegible] è 5×4, perchè m[illegible] il quozie[illegible] l divisore 7, si ot[illegible] punto il d[illegible] 7×4.

[illegible]VAZIONE. Da ques[illegible] luce facil[illegible]e, *per dividere* [illegible] *un numero,* [illegible] *ividere uno de'* [illegible] *o per questo*

numero, purchè però questa divisione si faccia esattamente.

Supponiamo infatti di voler dividere per 7 il prodotto $5\times21\times4$. Ora $21=7\times3$; quindi il prodotto dato può scriversi

$$5\times7\times3\times4.$$

Ma per dividere questo prodotto per 7, basta sopprimere il fattore 7; dunque il quoziente cercato è

$$5\times3\times4;$$

ciò che bisognava dimostrare.

70. Teorema III. *Per dividere un mumero pel prodotto di molti fattori, è sufficiente dividerlo successivamente per ciascuno di essi.*

La dimostrazione di questo teorema è facilissima, quando le divisioni si fanno esattamente. Debbasi infatti dividere 360 per 30, che è il prodotto dei fattori 2, 3, 5. Il quoziente della divisione di 360 per 30 è 12, quindi si ha

$$360=30\times12, \text{ ovvero } 360=2\times3\times5\times12.$$

Dividendo per 2 questi due numeri eguali, avremo quozienti eguali; dunque (68)

$$360:2=3\times5\times12;$$

poi per 3, [illegible]

$$[illegible] = 5\times12;$$

[illegible]te divide [illegible]

$$[illegible] 3:5=12;$$

[illegible] dire

$$[illegible] 5=360:[illegible]$$

71. Se le divisioni non danno quozienti interi e che ci limitiamo a prendere la parte intera di ciascuno d'essi, il teorema è ancora esatto, ma non apparisce egualmente evidente. Cominceremo dallo stabilire un lemma o proposizione preliminare.

Se un dividendo non è intero, la parte intera del quoziente della divisione per un divisore intero dipende solamente dalla parte intera del dividendo.

Supponiamo, per esempio, che si debba dividere per 17 un numero compreso tra 123 e 124; dico che la parte intera del quoziente è la medesima di quella che si ottiene dal dividere 123 per 17. La parte intera del quoziente è infatti (54) il massimo numero intero, il cui prodotto per 17 sia contenuto nel dividendo; questa parte è per conseguenza eguale al quoziente che si otterrebbe dividendo per 17 il massimo multiplo del 17 contenuto nel dividendo; ma i multipli di 17 sono numeri interi, dunque il massimo di questi multipli contenuto in un numero compreso tra 123 e 124, è lo stesso del massimo di quelli che sono contenuti in 123.

Ciò posto, supponiamo che si debba dividere 1847 per 12. Si può prendere (67) il terzo, poscia il quarto del resultato. Dividendo 1847 per 3, troviamo 165 per parte intera del quoziente; per conseguenza il terzo di 1847 è compreso tra 165 e 166. Quando dunque prenderemo il quarto di questo terzo, la parte intera sarà la stessa di quella del quarto di 165. Quindi è provato che la parte intera del quoziente di 1847 per 12 è la stessa di quella del quoziente di 165 per 4, cioè a dire che è uguale al resultato ottenuto dividendo 1847 per 3, poscia il resultato per 4, e limitandosi, ciascuna volta, a prendere la parte intera del quoziente.

72*. Quando le divisioni non si fanno esattamente,

il teorema proposto può dimostrarsi agevolmente nel seguente modo generalissimo.

Siano a, b i numeri dati, e sia $b = d \times d' \times d''$. Indichiamo con Q il quoziente di a diviso per b e con R il resto; con q il quoziente di a diviso per d e con r il resto; con q' il quoziente di q diviso per d' e con r' il resto; con q'' il quoziente di q' diviso per d'' e con r'' il resto. Avremo le seguenti eguaglianze

$$a = b \times Q + R = (d \times d' \times d'') \times Q + R,$$
$$a = d \times q + r$$
$$q = d' \times q' + r'$$
$$q' = d'' \times q'' + r''.$$

Sostituendo il valore di q' in quello di q, si ha

$$q = d' \times d'' \times q'' + d' \times r'' + r';$$

questo valore di q sostituito in quello di a dà

$$a = d \times d' \times d'' \times q'' + d \times d' \times r'' + d \times r' + r.$$

Ora è facile vedere che $d \times d' \times r'' + d \times r' + r$ è minore di $d \times d' \times d''$; infatti i maggiori valori che possano avere r, r', r'' sono evidentemente

$$r = d - 1, \quad r' = d' - 1, \quad r'' = d'' - 1;$$

quindi nel caso più sfavorevole si ha

$$\begin{aligned} d \times d' \times r'' &= d \times d' \times (d'' - 1) = d \times d' \times d'' - d \times d' \\ d \times r' &= \quad d \times (d' - 1) = d \times d' - d \\ r &= \qquad\qquad\quad d - 1; \end{aligned}$$

da cui

$$d \times d' \times r'' + d \times r' + r = d \times d \times d'' - 1.$$

Dunque q'' è il quoziente della divisione di a per $d \times d' \times d''$ o ciò ch'è lo stesso per b, $d \times d' \times r'' + d \times r' + r$ n'è il resto; per conseguenza si ha

$$q'' = Q \qquad d \times d' + r'' + d \times r' + r = R;$$

ciò che dimostra il teorema.

ESEMPIO. 1846 diviso per 12 dà 153 per quoziente e 11 per resto; quindi

$$1847 = 12 \times 153 + 11.$$

Ora si ha

$$1847 = 3 \times 615 + 2$$
$$1615 = 4 \times 153 + 3;$$

e sostituendo il valore di 615 in quello di 1847, si trova

$$1847 = 3 \times 4 \times 153 + 3 \times 3 + 2 = 12 \times 153 + 11.$$

73*. TEOREMA IV. *Per dividere due potenze di un numero, basta sottrarre gli esponenti.*

Infatti il quoziente di 5^7 diviso per 5^3 è $5^4 = 5^{7-3}$, poichè il quoziente 5^4 moltiplicato pel divisore 5^3 dà il dividendo 5^7.

Esercizi.

I. In Francia il consumo annuale è di 5716439726 litri di grano, 2361882282 litri di vino, 749120964462 grammi di carne, 223351911450 grammi di sale, e 124871689344 grammi di zucchero. Calcolare il consumo medio per abitante, supponendo il numero degli abitanti eguale a 34230178. Paragonare quest' esercizio al primo di quelli relativi alla moltiplicazione, e mostrare che la divisione è l' operazione *inversa* della moltiplicazione.

II. Se un numero è esattamente divisibile per 9, per trovare il quoziente della divisione, si può procedere nel modo seguente:

$$\begin{array}{r} 56940 \\ 51246 \\ \hline 5694 \end{array}$$

Sia il numero 51246; scrivete uno zero al di sopra della cifra delle unità, togliete il dividendo da un numero che

avendo questo zero per ultima cifra, avrebbe, per le altre cifre, quelle che somministra la sottrazione medesima; così dite: 6 da 10, 4; 4 è la cifra delle decine del numero superiore; 4 e 1, 5; 5 da 14 9; 9, è la cifra delle centinaia del numero superiore. 2 e 1, 3, 3 da 9 6; 6 è la cifra delle migliaia del numero superiore. 1 da 6, 5; 5 è la cifra delle decine di migliaia del numero superiore; 5 da 5, 0; il quoziente cercato è 5694.

III. Se un numero è esattamente divisibile per 11, si può fare la divisione in un modo analogo. Sia da dividersi il numero 345785 per 11.

```
345785
314350
------
 31435
```

Scrivete un zero al di sotto della cifra delle unità e toglie te dal dividendo un numero di cui lo zero è l'ultima cifra, e le cui altre cifre sono somministrate dalla sottrazione medesima.

IV. Se un numero è esattamente divisibile per 99, si può procedere nel modo seguente per ottenere il quoziente. Si debba dividere 56529 per 99.

```
57100
56529
-----
  571
```

Scrivete due zeri al di sopra delle due ultime cifre del dividendo e toglie te il dividendo da un numero che abbia questi due zeri per ultime cifre, e quelle somministrate dalla sottrazione medesima per le rimanenti.

V. In Francia vi sono 4395 macchine a vapore, la cui forza totale è di 54467 cavalli, qual è la forza media di queste macchine?

VI. Il dipartimento della Senna possiede 663 di queste macchine. La loro forza totale è 5065 cavalli, la forza media in questo dipartimento è maggiore che nel resto della Francia?

Fare il medesimo calcolo pel dipartimento dell'alta Loira, che possiede 11 macchine la cui forza è di 217 cavalli.

VII. Quando si dice che una macchina ha la forza di un certo numero di cavalli, s' intende che è capace di produrre un certo numero di volte un' effetto determinato, che, per convenzione, corrisponde alla forza di un cavallo; si è calcolato che le macchine che sono in Francia, possono rimpiazzare effettivamente il lavoro di 163401 cavalli da tiro. Sapendo che la loro forza totale è di 54467 cavalli, trovare quanti cavalli da tiro può sostituire una macchina della forza di 25 cavalli.

VIII. Una macchina a vapore consuma, per forza di cavallo e per ora, 6750 grammi di carbone; sapendo che ha consumato in otto giorni (lavorando giorno e notte), 395 ettolitri di carbone, al peso di 80 chilogrammi l' ettolitro, trovare qual' è la sua forza.

IX. Una strada ferrata ha trasportato nel 1849, 1129371 viaggiatori ad una distanza media di 13 chilometri; ha consumato in combustibile, 98536 franchi. Il coke valendo 4 franchi 30 centesimi l' ettolitro, e l' ettolitro pesando 80 chilogrammi, trovare in grammi, il peso del coke corrispondente a un viaggiatore e a un chilometro.

X. In Francia si sono fabbricati nel 1847, 8315 quintali metrici di ferri da falce: qual' è il numero di questi ferri, sapendo che il peso medio di un d' essi è 775 grammi?

XI. Le mine di carbone, in Francia, impiegano 31752 operai; il carbone estratto monta annualmente a 44693420 quintali metrici: qual' è la produzione annuale per operaio?

XII. La superficie della Francia valutata in miglia quadrate di 15 al grado è 11653: quella della monarchia prussiana è 5040. La popolazione della Francia essendo 34230178, e quella della Prussia 12552278, qual è quello dei due paesi nel quale la popolazione è più densa?

CAPITOLO V.

CONDIZIONI DI DIVISIBILITÀ.

Prova del 9 e dell' 11.

CONDIZIONI DI DIVISIBILITÀ.

Definizioni e Teoremi generali.

74. Quando il resto di una divisione è nullo, si dice che il dividendo è divisibile pel divisore; e si vede chiaro che allora è uguale al prodotto del divisore pel quoziente. Infatti, dire, per esempio, che 42 diviso per 6 dà per quoziente 7, è lo stesso che dire, che 42 è uguale a sei volte sette o a sette volte sei. Da ciò risulta, che un numero divisibile per un altro è (27) uno dei suoi multipli; e reciprocamente, tutti i multipli di un numero sono evidentemente divisibili per questo numero.

Un numero che divide un altro si chiama spesso *divisore* di quest' altro. Quindi le seguenti espressioni sono equivalenti:

42 è divisibile per 6.
42 è un multiplo di 6.
6 è un divisore di 42.

75. Teorema I. *Se un numero divide esattamente tutte le parti di una somma, divide anche la somma.*

La somma è in fatti composta di parti eguali ciascuna a un numero intero di volte il divisore, quindi essa conterrà questo divisore un numero intero di volte, giacchè la somma di molti numeri interi, è un numero intero.

Esempio. 7 divide 56, 70, 84; dividerà anche la loro somma. Infatti si ha

$$56+70+84=7\times8+7\times10+7\times12=7\times(8+10+12).$$

76. Teorema II. *Qualunque numero che divide un altro, ne divide i multipli.*

Giacchè, i multipli di un numero potendo ottenersi aggiungendolo a se stesso un certo numero di volte, è chiaro che i suoi divisori dividono tutte le parti delle somme così formate e, per conseguenza (75), le somme medesime.

77. Teorema III. *Qualunque numero che divide esattamente due altri, divide anche la loro differenza.*

I due termini di questa differenza contengono, infatti, un numero intero di volte il divisore, quindi la differenza conterrà questo divisore un numero intero di volte, giacchè la differenza di due numeri interi è un numero intero.

Esempio. 8 divide 120 e 48; dividerà anche la loro differenza. Infatti si ha

$$120-48=8\times15-8\times6=8\times(15-6).$$

Osservazione. *Qualunque numero che divide esattamente una somma e una delle sue parti, divide anche l' altra parte.*

Questo teorema non differisce dal precedente che per la forma dell' enunciato, giacchè la seconda parte della somma può essere considerata come la differenza tra l' intera somma e l' altra parte.

78. Teorema IV. *Se due numeri divisi per un terzo danno resti eguali, la loro differenza è divisibile per questo terzo numero; e reciprocamente, se la differenza di due numeri è divisibile per un terzo, questi due numeri divisi pel terzo daranno resti eguali.*

Se, infatti, si tolgono dai due numeri questi resti, che per supposizione sono uguali, la loro differenza non muterà; ma dopo questa sottrazione sono l' uno e l' altro divisibili pel divisore considerato, e per conseguenza (77), la loro differenza è anche divisibile per questo medesimo numero.

Reciprocamente, se la differenza di due numeri è divisibile per un terzo, questi due numeri divisi pel terzo, danno resti eguali. Si abbiano infatti i due numeri 87 e 65 la cui differenza 22 è divisibile per 11: dico che questi numeri, divisi per 11, danno resti eguali. Infatti potremo considerare 87 come eguale a 65 aumentato della differenza 22; ora è evidente che dividendo per 11 questa somma 65+22, la seconda parte 22, dividendosi esattamente e dando per quoziente 2, non farà altro che aumentare il quoziente di due unità, e il resto risulterà solamente dalla divisione di 65 per 11. Quindi 86 diviso per 11, lascia il medesimo resto che 65 diviso per 11.

La proposizione precedente si può enunciare in questo modo: il resto di una divisione non varia aggiungendo o togliendo al dividendo un multiplo del divisore.

79*. Teorema V. *Se più numeri si dividono per uno stesso divisore, la somma dei numeri dati e la somma dei resti divisi pel divisore danno resti eguali.*

Siano 90, 68, 47 i numeri dati; dividendo questi numeri per 12 si hanno i resti rispettivi 6, 8, 11, quindi

$$90=12\times7+6,$$
$$68=12\times5+8,$$
$$47=12\times3+11.$$

Sommando quest' eguaglianze si trova

$$90+68+47=12\times(7+5+3)+6+8+11;$$

ma $12\times(7+5+3)=12\times15$ è un multiplo di 12; dunque il resto della divisione di $90+68+47$ per 12, è lo stesso di quello della divisione per 12 di $6+8+11$.

80*. Teorema VI. *Se due numeri si dividono per uno stesso divisore, il prodotto dei numeri dati e il prodotto dei resti divisi pel divisore, danno resti eguali.*

Siano 68 e 47 i numeri dati, e 12 il divisore. Facendo la divisione di questi due numeri per 12 si trova

$$68=12\times5+8,$$
$$47=12\times3+11.$$

Quindi

$$\begin{aligned}68\times47&=(12\times5+8)\times(12\times3+11)\\&=(12\times5+8)\times3\times12+(12\times5+8)\times11,\\&=(12\times5+8)\times3\times12+5\times11\times12+8\times11.\end{aligned}$$

Ora tutti i numeri del secondo membro, ad eccezione di 8×11, sono multipli di 12; per conseguenza potremo scrivere

$$68\times47=\textit{un multiplo di } 12+8\times11.$$

Ma un multiplo di 12 è divisibile per 12; dunque il resto della divisione di 68×47 per 12 è lo stesso di quello della divisione per 12 di 8×11. Questo ragionamento è generale ed affatto indipendente dai numeri 68, 47, 12.

E invero, siano a e b due numeri interi qualunque, d un divisore, q e q' i quozienti della divisione di a e b per d, r ed r' i resti respettivi, avremo

$$a=q\times d+r,$$
$$b=q'\times d+r';$$

e ancora

$$\begin{aligned}a\times b&=(q\times d+r)\times(q'\times d+r')=(q\times d+r)\times q'\times d+(q\times d+r)\times r'\\&=(q\times d+r)\times q'\times d+q\times d\times r'+r\times r'\\&=\text{un multiplo di } d+r\times r'.\end{aligned}$$

Ma un multiplo di d è divisibile per d, dunque ec.

Osservazione. Questo teorema si estende facilmente a più numeri; cioè *se più numeri si dividono per uno stesso divisore, il prodotto dei numeri dati e il prodotto dei resti divisi pel divisore danno resti eguali.*

Consideriamo i numeri 68, 47, 27, i quali divisi per 12 danno respettivamente 8, 11, 3 per resti; avremo

$$68 = 12 \times 5 + 8,$$
$$47 = 12 \times 3 + 11,$$
$$27 = 12 \times 2 + 3.$$

Dalle due prime eguaglianze si deduce come innanzi

$$68 \times 47 = \textit{un multiplo di } 12 + 8 \times 11.$$

Moltiplicando quest' eguaglianza membro a membro coll' altra

$$27 = 12 \times 2 + 3,$$

si otterrebbe egualmente

$$68 \times 47 \times 27 = \textit{un multiplo di } 12 + 8 \times 11 \times 3;$$

la quale eguaglianza dimostra il teorema. Si procederebbe in modo analogo quando i numeri fossero più di tre.

Condizioni di divisibilità per 2, 5, 4, 25, 8 e 125.

81. Il Teorema IV, dà il modo di calcolare facilmente il resto di una divisione, quando il divisore è uno dei numeri 2, 5, 4, 25, 8, 125.

1°. *Il resto di una divisione per* 2 *o per* 5, *si ottiene dividendo per* 2 *o per* 5 *la cifra delle unità del dividendo.*

Sia il numero 78917. Si ha

$$78917 = 7891 \times 10 + 7;$$

siccome 10 è divisibile per 2 e per 5, da questa eguaglianza apparisce evidente che il resto della divisione di 78917 per 2 o per 5, è lo stesso di quello di 7 diviso pei medesimi numerí. Da ciò resulta che 78917, diviso per 2 dà per resto 1, e diviso per 5, dà per resto 2.

Osservazione. Affinchè un numero sia divisibile per 2 o per 5, bisogna che il resto della divisione sia 0, e per conseguenza che la cifra delle unità sia divisibile per 2 o per 5.

Le sole cifre divisibili per 5, essendo 0 e 5, affinchè un numero sia divisibile per 5, è necessario e sufficiente che termini con uno 0, o con un 5.

2° *Il resto di una divisione per 4 o per* 25, *si ottiene dividendo per* 4 *o per* 25 *il numero espresso dalle due ultime cifre del dividendo.*

Abbiasi il numero 78917. Si ha

$$78917 = 789 \times 100 + 17;$$

siccome 100 è divisibile per 4 e per 25, da questa eguaglianza apparisce chiaro che il resto della divisione di 78917 per 4 o per 25 è lo stesso di quello della divisione di 17 per i medesimi numeri. Ma 17 diviso per 4 dà per resto 1, e diviso per 25 dà per resto 17; dunque 78917 diviso per 4 o 25 da per resto 1 o 17.

Osservazione. Perchè un numero sia divisibile per 4 o 25, fa d'uopo che il resto della divisione sia 0, e per conseguenza che le due ultime cifre formino un numero divisibile per 4 o 25.

I soli numeri di due cifre divisibili per 25 essendo 00, 25, 50 e 75; perchè un numero sia divisibile per 25 è necessario e sufficiente che sia terminato da 00, 25, 50, 75.

3° *Il resto di una divisione per* 8 *o* 125, *si ottiene dividendo per* 8 *o* 125 *il numero formato dalle tre ultime cifre.*

La dimostrazione si farà in modo assolutamente analogo alle due precedenti, osservando che 1000 essendo eguale a 8×125, qualunque multiplo di 1000, è divisibile per 8 e per 125; e per conseguenza non influisce sul resto della divisione per questi due numeri.

Come nei casi precedenti si vedrà che la condizione necessaria e sufficiente, perchè un numero sia divisibile per 8, è che l'insieme delle tre ultime cifre, formi un numero divisibile per 8.

OSSERVAZIONE. Le dimostrazioni precedenti si fondano su questo che, 10 è divisibile per 2 e per 5; 100 per 4 e 25; 1000 per 8 e 125. Queste verità si possono ammettere come fatti facili a verificare, ma si possono ancora desumere le une dalle altre nel seguente modo:

$$10 = 2\times5.$$
$$100=10\times10=(2\times5)\times(2\times5)=2\times5\times2\times5=2^2\times5^2=4\times25$$
$$1000 = 10\times10\times10 = (2\times5)\times(2\times5)\times(2\times5)$$
$$= 2\times5\times2\times5\times2\times5 = 2^3\times5^3 = 8\times125.$$

Condizione di divisibilità per 9.

82*. Le condizioni di divisibilità per 9 e per 11 saranno da noi dedotte dai Teoremi V e VI.

Premettiamo le seguenti proposizioni preliminari.

1° *Il resto della divisione per* 9 *di* 10, 100, 1000, 10000 *ec., è* 1.

La proposizione è evidente per 10. Ma $100 = 10\times10$, dunque (80*) il resto della divisione per 9 di 100 è uguale a quello di 1×1, diviso per 9, cioè a 1. Lo stesso si dimostrerebbe per 1000, 10000 ec., osservando che

$$1000 = 100\times10, \quad 10000 = 1000\times10 \text{ ec.}$$

2°. *Il resto della divisione per 9, di un numero composto di una cifra significativa seguita da uno o più zeri è questa cifra.*

Abbiasi per esempio 70000. Questo numero è il prodotto di 7 per 10000; ma i resti delle divisioni per 9 di 7 e di 10000 sono rispettivamente 7 e 1, quindi il resto di 70000 diviso per 9 è 7.

83*. Ora possiamo dimostrare la proposizione seguente:

Il resto della divisione per 9 di un numero qualunque è dato dalla somma delle sue cifre divisa per 9.

Abbiasi per esempio 72385. Questo numero è uguale a 70000+2000+300+80+5; ma i resti rispettivi della divisione per 9 di 70000, 2000, 300, 80 e 5 sono 7, 2, 3, 8 e 5; dunque (79*) il resto della divisione per 9 di 72385 è dato da 7+2+3+8+5 diviso per 9.

Questo teorema può ancora enunciarsi nel seguente modo: *Un numero qualunque è eguale a un multiplo di 9, più la somma delle sue cifre.*

84. Da questa proposizione risulta evidentemente l'altra che: *affinchè un numero sia divisibile per 9 è necessario e sufficiente che la somma delle sue cifre sia divisibile per 9.*

Condizione di divisibilità per 3.

85. *Perchè un numero sia divisibile per 3, è necessario e sufficiente che la somma delle sue cifre sia divisibile per 3.*

Poichè 9 è un multiplo di 3, un numero qualunque (83*) è uguale a un multiplo di 3, più la somma delle sue cifre; un multiplo di 3 è divisibile per 3; se dunque anche la somma delle cifre è divisibile per 3, il numero dato (75) sarà divisibile per 3.

Condizione di divisibilità per 11.

86*. Prima di enunciare questa condizione stabiliremo due proposizioni preliminari.

1°. *Il resto della divisione per* 11 *dell' unità seguita da un numero pari di zeri è* 1, *e il resto della divisione per* 11 *dell' unità seguita da un numero dispari di zeri è* 10.

La prima parte della proposizione è evidente per 100, poichè $100 = 11 \times 9 + 1$; essendo evidente per 100 è anche evidente per 10000, 1000000, ec., perchè questi numeri sono rispettivamente eguali a 100×100, $100 \times 100 \times 100$, ec.

La seconda parte è evidente per 10; essendo evidente per 10, è anche evidente per 1000, 100000, ec., perchè $1000 = 10 \times 100$, $100000 = 1000 \times 100$, ec.

2°. *Il resto della divisione per* 11 *di un numero composto di una cifra significativa seguita da un numero pari di zeri, è questa cifra significativa; il resto della divisione per* 11 *di una cifra significativa seguita da un numero dispari di zeri, è la differenza fra* 11 *e la cifra significativa.*

Abbiasi 70000. I resti respettivi della divisioni per 11 di 7 e di 10000 sono 7 e 1, quindi (80*) il resto della divisione per 11 di 7×10000, ovvero di 70000 è 7.

Per dimostrare la seconda parte, osserviamo che la regola si verifica pei numeri 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90.

Per qualunque altro numero formato da una cifra significativa seguita da un numero dispari di zeri si dimostra nel seguente modo. Abbiasi per esempio 700000. I resti respettivi delle divisioni per 11 di 70 e di 10000

sono 4 e 1; dunque (80') il resto della divisione per 11 di 70×10000, ovvero di 700000 è 4.

87'. Ora possiamo dimostrare la proposizione che: *il resto della divisione per* **11** *di un numero qualunque è dato aggiungendo a ciascuna cifra di posto dispari la differenza da* **11** *di ciascuna cifra di posto pari, e dividendo per* **11** *la somma totale.*

Abbiasi per esempio 82145. Questo numero è uguale a $80000+2000+100+40+5$; i resti respettivi delle divisioni per 11 di 80000, 2000, 100, 40 e 5 sono 8, 9, 1, 7 e 5; dunque il resto della divisione per 11 di 82145 è dato da $8+9+1+7+5$ diviso per 11.

88'. Da questa proposizione risulta evidentemente l'altra: *affinchè un numero qualunque sia divisibile per* **11** *è necessario e sufficiente che sia divisibile per* **11** *la somma delle cifre di posto dispari, più la somma delle differenze da* **11** *delle cifre di posto pari.*

Esempio. Sia il numero 459637; la somma delle cifre di posto dispari è $7+6+5=18$, quella delle differenze da 11 delle cifre di posto pari è $8+2+7=17$; la somma totale è 35; 35 non è divisibile per 11, dunque il numero proposto non è divisibile per 11.

Prova per 9 e per 11.

89'. Le proposizioni precedenti si applicano al modo di far la prova pei divisori 9 e 11 delle quattro operazioni dell'aritmetica. Ragioneremo sul divisore 9, ma ciò che diremo si applicherà egualmente a 11 e a qualunque altro divisore.

Addizione. *Per fare la prova per* **9** *dell'addizione di più numeri, si cercano i resti delle divisioni per* **9** *di questi numeri; la somma di questi resti divisa per* **9**,

deve lasciare lo stesso resto della somma dei numeri proposti.

Questa regola risulta chiara dal Teorema V.

Esempio. Supponiamo che sommando fra loro i numeri 8963, 3409, 673, si sia trovato per somma 13045; 8963, 3409, 673, divisi per 9, lasciano per resti 8, 7, 7; la loro somma 13045, divisa per 9, deve dunque dare il medesimo resto che $8+7+7=22$, cioè a dire 4. Il numero 13045 soddisfa a questa condizione, giacchè la somma delle sue cifre è 13.

Sottrazione. *Per fare la prova per 9 della sottrazione di due numeri, si cercano i resti delle divisioni per 9 del diminutore e della differenza trovata, la somma di questi resti divisa per 9 deve lasciare lo stesso resto del diminuendo.*

Questa regola risulta evidentemente dall'osservazione che in una sottrazione, il diminuendo è uguale alla somma del diminutore e del resto.

Esempio. Supponiamo che sottraendo 527982 da 769345 si sia trovato per resto 241363; quest'ultimo numero e 527982, divisi per 9 lasciano per resti 1, 6; la loro somma 769345 divise per 9, deve dunque dare il medesimo resto che $1+6=7$, cioè 7. Il numero 469345 sodisfa a questa condizione, giacchè la somma delle sue cifre è 34.

Moltiplicazione. *Per fare la prova per 9 della moltiplicazione di due numeri si cercano i resti della divisione per 9 del moltiplicando e del moltiplicatore; il prodotto di questi resti diviso per 9, deve lasciare lo stesso resto del prodotto dei numeri proposti.*

Questa regola è una conseguenza del Teorema VI, e si applica qualunque sia il numero dei fattori di cui si vuol verificare il prodotto.

Esempio. Supponiamo che moltiplicando 723 per 87,

siasi trovato per prodotto 62901; 723 e 87 divisi per 9, lasciano per resti 3 e 6; il loro prodotto deve dunque dare il medesimo resto che 3×6 o 18; cioè deve essere divisibile per 9. Il numero 62901 soddisfa a questa condizione, giacchè la somma delle sue cifre è 18.

Divisione. *Per fare la prova per* 9 *della divisione, si cercano i resti della divisione per* 9 *del divisore, del quoziente e del resto; il prodotto dei due primi resti unito al terzo, deve dare, diviso per* 9, *lo stesso resto del dividendo.*

Per dimostrare questa regola, supponiamo che avendo diviso 590549 per 859, siasi trovato 687 per quoziente e 416 per resto. Se la divisione è fatta bene deve aversi

$$590549 = 859\times687+416.$$

Pel Teorema V si ha, che trovando i resti delle divisioni per 9 di 859×687, e di 416, la somma di questi resti, e 590549, divisi per 9, debbono dare resti eguali. Ora, il resto della divisione per 9 del prodotto 859×687, si ottiene (Teorema VI) dividendo per 9 il prodotto dei resti delle divisioni per 9 di 859 e di 687. Dunque trovati i resti della divisione per 9 di 859 e 687, il prodotto di questi resti unito al resto per 9 di 416, deve dare, diviso per 9, lo stesso resto del dividendo 590549.

Infatti i resti della divisione per 9 di 859, 687, 416, sono 4, 3, 2, il prodotto dei resti 4 e 3, unito al resto 2, dà 14 per risultato; questo numero diviso per 9 dà 5 per resto. Se l'operazione è ben fatta 590549 diviso per 9, deve dare anche 5 per resto; ciò che ha effettivamente luogo, perchè la somma delle cifre di 590549 è 32.

90. Se la prova per 9 di una operazione non riesce l'operazione è inesatta; ma il contrario non è sempre vero. Infatti allora fa d'uopo conchiudere solamente che

l'errore, quando vi fosse, è un multiplo di 9. Similmente la riuscita della prova per 11, dice solamente che l'errore, quando vi fosse, è un multiplo di 11. Affinchè le due prove riescano, l'operazione non essendo esatta, basterebbe che l'errore fosse ad una volta multiplo di 11 e di 9.

91. Osservazione. I valori particolari dei numeri 9 e 11, non influiscono sui ragionamenti che precedono; le conchiusioni resterebbero le medesime considerando altri divisori. La sola ragione che induce a preferire 9 o 11, è la facilità con la quale si ottengono i resti delle divisioni per questi numeri. I divisori 2, 3, 4, 5, 8, 10, 25, danno anche, invero, resti facili a calcolare; ma la prova per questi differenti numeri non darebbe ai resultati che una assai piccola probabilità di esattezza.

Il resto di una divisione per 2, 5, 10, 4, 25 e 8, dipende solamente dalla prima, dalle due prime o dalle tre prime cifre a destra, quindi la prova per uno di questi numeri farebbe portare la verificazione su queste sole cifre.

L'esito della prova per 3 farebbe solamente conoscere che l'errore, quando vi fosse, sarebbe un multiplo di 3, e poichè su tre numeri consecutivi uno è divisibile per 3, il caso la farebbe riuscire spesso per operazioni inesatte. Aggiungiamo di più che nel caso in cui la prova per 9 è riuscita, la prova per 3 non insegnerebbe nulla di nuovo, giacchè quando l'errore è un multiplo di 9, è anche un multiplo di 3.

Esercizi.

I. Un numero è divisibile per 6, se la cifra delle unità aggiunta a quattro volte la somma di tutte le altre dà una somma divisibile per 6.

II. Un numero è divisibile per 4, se la cifra delle unità aggiunta al doppio della cifra delle decine dà una somma divisibile per 4.

III. Un numero è divisibile per 8, se la cifra delle unità aggiunta al doppio della cifra delle decine, e a quattro volte quella delle centinaia dà una somma divisibile per 8.

IV. Un numero è divisibile per 99 se, separandolo in classi di due cifre cominciando dalla destra, la somma delle classi è divisibile per 99. La stessa regola si applica ai divisori 9 e 11.

V. La somma dei quadrati di due numeri interi è divisibile per 7 allora soltanto quando i due numeri dati sono divisibili per 7.

VI. Moltiplicando due numeri interi consecutivi, il prodotto è sempre pari; prendendo la metà di questo prodotto si avrà un quoziente che diviso per 3, non potrà dar mai per resto 2.

VII. a e b essendo due numeri non divisibili per 3, a^6-b^6 è divisibile per 9.

VIII. La divisione per 9 di un numero le cui cifre sono $abcde$ si può ottenere nel seguente modo: si fa la somma delle cifre $a+b+c+d+e$, e si divide per 9; sia q il quoziente ed r il resto; r sarà, come è noto, il resto della divisione proposta. Il quoziente di questa divisione si otterrà aggiungendo q alla somma dei numeri seguenti, $a+ab+abc+abcd$. Per esempio, per dividere 75234 per 9 si farà la somma delle cifre, 21, che divisa per 9 dà per quoziente 2, e il quoziente sarà 2+7+75+752+7523, cioè a dire 8359.

IX. Se il quadrato di un numero diminuito di 13 è divisibile per 9, questo numero diviso per 9 lascia per resto 2 o 7. La reciproca è vera.

X. Due numeri qualunque a e b divisi per la loro differenza $a-b$ danno resti eguali; se ne conchiuderà che a^m e b^m divisi per $a-b$ danno anche il medesimo resto, e che per conseguenza, a^m-b^m è divisibile per $a-b$ quale che sia il numero intero m.

XI. Se, nel fare una moltiplicazione, si dimentica di far retrocedere di un posto le cifre di un prodotto parziale, la prova per 9 riuscirà egualmente. La prova per 9 e la prova per 11 riusciranno anche quando si fanno retrocedere le cifre di un prodotto parziale di due posti più del convenevole verso la sinistra.

CAPITOLO VI.

DIVISORI COMUNI DEI NUMERI INTERI.

Definizioni.

92. Un numero che divide esattamente molti altri si chiama il loro *divisore comune.* Spesso è utile conoscere i divisori comuni a molti numeri, e particolarmente il maggiore tra essi, che chiamasi il loro *massimo comun divisore.*

In questo capitolo si parlerà solamente dei numeri interi e dei loro divisori interi.

Teoremi sui quali è fondata la ricerca del massimo comun divisore.

93. TEOREMA I. *Se due numeri sono divisibili l' uno per l' altro il loro massimo comun divisore è eguale al minore dei due.*

Si abbiano i numeri 42 e 6, che sono divisibili l'uno per l'altro; 6 è evidentemente uno dei loro divisori comuni, e non può esservene uno maggiore, giacchè un numero maggiore di 6 non potrebbe dividere 6. Dunque 6 è il loro massimo comun divisore.

94. TEOREMA II. *Due numeri non divisibili l' uno per l' altro, hanno il medesimo massimo comun divisore che il minore di essi e il resto della loro divisione.*

Siano i numeri 7524 e 918. Dividendoli l' uno per l' altro, si trova 8 per quoziente e 180 per resto, in guisa che:

$$7524 = 918 \times 8 + 180.$$

Da questa eguaglianza resulta:

1°. Che tutti i divisori comuni a 7524 e 918 dividono 180; giacchè questi numeri dividendo 918, dividono il suo multiplo 918×8; essi dividono dunque una somma 7524, e una delle sue parti 918×8, e per conseguenza (77) dividono anche l' altra parte, che è 180.

2°. Che i divisori comuni a 180 e 918 dividono tutti 7524; giacchè questi numeri dividendo 918, dividono il suo multiplo 918×8; essi dividono dunque le due parti di una somma 918×8 e 180, e, per conseguenza (78), dividono ancora questa somma che è 7524.

Dunque:

Tutti i divisori comuni a 7524 e 918 dividono 180, e per conseguenza 180 e 918.

Tutti i divisori comuni a 180 e 918, dividono 7524 e per conseguenza 7524 e 918.

Queste due proposizioni riunite dimostrano che i divisori comuni a 7524 e 918, sono comuni a 180 e 918; per conseguenza il massimo comun divisore dei primi è lo stesso di quello dei secondi. Ciò che bisognava dimostrare.

Ricerca del massimo comun divisore di due numeri interi.

95. In virtù del teorema precedente, si potranno sostituire ai due numeri di cui vuolsi trovare il massimo comun divisore due altri più semplici. Questi ultimi potranno al modo stesso essere sostituiti da altri ancora più semplici, e così di seguito, sino a che si pervenga a due numeri divisibili l' uno per l' altro. Possiamo dunque enunciare la regola seguente:

Per cercare il massimo comun divisore di due numeri interi, si divide il maggiore pel minore, poi il minore pel resto della loro divisione, e si continua così

a dividere ciascun divisore pel resto corrispondente sino a che una di queste divisioni si faccia esattamente; il divisore di questa divisione è il massimo comun divisore cercato.

96. Perchè questa regola conduca al risultato, bisogna che uno dei resti divida esattamente il precedente; ma ciò accadrà sempre, giacchè i resti essendo tutti interi e decrescenti, il loro numero è necessariamente limitato.

97. Supponiamo, per esempio, di voler trovare il massimo comun divisore dei numeri 7524 e 918. Dividiamo 7524 per 918; si trova 8 per quoziente e 180 per resto: dunque il massimo comun divisore cercato non è 918, ma è uguale al massimo comun divisore di 918 e di 180. Dividiamo allora 918 per 180; troviamo 5 per quoziente e 18 per resto; per conseguenza il massimo comun divisore cercato non è 180, ma è uguale al massimo comun divisore di 180 e di 18. Dividiamo dunque 180 per 18; troviamo 10 per quoziente e 0 per resto; dunque 18 è il massimo comun divisore cercato.

L'operazione si dispone abitualmente nel seguente modo:

	8	5	10
7524	918	180	18
180	18	0	

98. Osservazione I. Nella ricerca del massimo comun divisore, due resti consecutivi qualunque hanno il medesimo massimo comun divisore che i numeri proposti. Se dunque si conosce il massimo comun divisore di due di questi resti, si potrà fare a meno di continuare l'operazione. La pratica del calcolare e la conoscenza dei divisori dei numeri, possono solo guidare nell'applicazione di questa osservazione. Uno dei casi più semplici è

quello nel quale il maggiore di due resti consecutivi fosse *primo* (111). Infatti è evidente che non può allora avere col seguente altro comun divisore che l' unità.

99. Osservazione II. Il metodo che abbiamo esposto per la ricerca del massimo comun divisore di due numeri, mostra chiaramente che: *qualunque divisore comune a due numeri divide il loro massimo comun divisore.*

Infatti considerando, per esempio, i numeri 7524 e 918, abbiam provato che i loro divisori comuni dividono il resto 180 della loro divisione; dividendo 918 e 180, dividono il resto 18 della loro divisione, cioè a dire il massimo comun divisore di 7524 e 918.

100*. La ricerca del massimo comun divisore di due numeri può, in taluni casi, rendersi più semplice mediante il seguente:

Teorema III. *Due numeri hanno il medesimo massimo comun divisore del minore di essi e della differenza fra un multiplo di quest' ultimo e l' altro numero.*

Questo teorema si dimostrerà in un modo affatto identico a quello che abbiamo tenuto pel Teorema II. Così se i numeri dati sono 312 e 108, prendendo la differenza fra 312 e un multiplo qualunque di 108, per esempio 108×3, si trova 12 per resto e si ha quindi l'eguaglianza

$$108\times3-312=12, \text{ ovvero, } 312=108\times3-12;$$

dalla quale apparisce chiaro che il massimo comun divisore di 312 e di 108 è uguale a quello di 108 e di 12.

L'applicazione di questo teorema riesce utile quando uno dei resti delle divisioni successive che bisogna effettuare per la ricerca del massimo comun divisore di due numeri è maggiore della metà del divisore corrispondente.

Per comprendere ciò, fa d'uopo ricordare che il resto di una divisione è uguale alla differenza fra il dividendo e il massimo multiplo del divisore che può esservi contenuto (53); la differenza fra il dividendo e il multiplo immediatamente seguente del divisore, unita al resto, dà un numero eguale al divisore. Questo risultato è evidente e può d'altronde verificarsi agevolmente; tuttavia non sarà inutile darne una dimostrazione generale.

Sieno a e b due numeri interi qualunque, q il quoziente della loro divisione e r il resto; avremo

$$a = b \times q + r.$$

Chiamiamo r' la differenza fra a e $b \times (q+1)$; avremo

$$a = b \times (q+1) - r' = b \times q + b - r';$$

il confronto di queste due eguaglianze dà evidentemente

$$r = b - r', \text{ ovvero } b = r + r'.$$

Questo risultato dimostra che se $r > \frac{b}{2}$, r' sarà minore di r; quindi tutte le volte che il resto della divisione di due numeri è maggiore della metà del divisore, invece di sostituire ad a il numero r, come si pratica nel caso generale, sarà utile sostituirvi il numero r'; il quale, in virtù dell'eguaglianza $b = r + r'$, è dato sempre dalla differenza fra il divisore e il resto.

Così, dividendo 312 per 108, si trova 96 per resto; il massimo comun divisore di 312 e di 108, è (Teorema II) il massimo comun divisore di 108 e di 96; ma 96 è maggiore della metà del divisore 108, dunque, (Teorema III), potremo sostituire a 312 la differenza fra 108 e 96, cioè 12.

Per conseguenza il massimo comun divisore di 312 e di 108, è il massimo comun divisore di 12 e 108, cioè a dire è 12, poichè 108 è divisibile per 12.

Possiamo quindi enunciare la seguente regola:

Se nella ricerca del massimo comun divisore di due numeri, una divisione dà un resto maggiore della metà del divisore, si sostituisce a questo resto la sua differenza dal divisore.

Applichiamo questa regola alla ricerca del massimo comun divisore dei numeri 35676 e 25812.

	1	2	2	2	2	3	2	2
35676	25812	9864	3780	1476	648	180	72	36
9864	6084	2304	828	180	108	36	0	
	3780	1476	648		72			

La regola generale (95) renderebbe necessarie dodici divisioni per trovare il massimo comun divisore 36; mentre noi l' abbiamo trovato con otto divisioni solamente.

Ricerca del massimo comun divisore di più numeri interi.

101*. La ricerca del massimo comun divisore di più numeri interi si fonda sul seguente teorema.

Teorema IV. *Il massimo comun divisore di più numeri interi è lo stesso di quello del massimo comun divisore di due tra essi e dei numeri dati rimanenti.*

Abbiansi, per esempio, i quattro numeri interi A, B, C, D, e sia d il massimo comun divisore di A e di B; dico che il massimo comun divisore dei numeri d, C, D, è anche il massimo comune divisore dei numeri proposti.

In fatti, qualunque divisore comune dei quattro numeri dati, dividendo A e B, divide il loro massimo comune divisore d, e quindi è un divisore comune dei numeri d, C, D. Reciprocamente, qualunque divisore comune dei numeri d, C, D, dividendo d, divide A e B che sono multipli di d, ed è per conseguenza divisore comune dei numeri proposti.

Quindi i numeri A, B, C, D, hanno gli stessi comuni divisori dei numeri d, C, D; per conseguenza, il massimo comun divisore dei primi è eguale al massimo comun divisore dei secondi.

102*. In virtù di questo teorema la ricerca del massimo comun divisore di più numeri interi, è ridotta a quella del massimo comun divisore di due soli numeri.

E invero, ritenute le denominazioni precedenti, si è dimostrato che il massimo comun divisore dei numeri interi

$$A,\ B,\ C,\ D,$$

è uguale a quello di

$$d,\ C,\ D.$$

Applicando il teorema precedente a questi ultimi tre numeri e chiamando d' il massimo comun divisore di d e di C, si dimostrerebbe al modo stesso che il massimo comun divisore di questi tre numeri è eguale a quello di

$$d',\ \ D.$$

Se dunque s'indica con d'' il massimo comun divisore di questi due numeri, pel Teorema IV. si ha che d'' è anche il massimo comun divisore di A, B, C, D.

Esempio. Abbiansi i quattro numeri 360, 600, 1368, 4212.

Il massimo comun divisore di 360 e di 600 è 120; quello di 120 e di 1368, è 24; e finalmente quello di 24 e di 4212, è 12. Dunque 12 è il massimo comun divisore dei quattro numeri proposti.

Possiamo quindi enunciare la regola seguente:

Per avere il massimo comun divisore di più numeri, si cerca il massimo comun divisore dei due primi; poi il massimo comun divisore del numero così ottenuto e del terzo dei numeri proposti; e così di seguito sino

a che si siano adoperati tutti i numeri dati. L' ultimo massimo comun divisore ottenuto a questo modo è quello dei numeri proposti.

103*. Da questa regola risulta evidentemente che: *qualunque divisore comune a più numeri divide il loro massimo comun divisore.*

Indichiamo, infatti, con N un divisore comune ai quattro numeri interi A, B, C, D; abbiamo provato che N è anche divisore comune a, d, C, D. Un simile ragionamento proverebbe che N dividendo d, C, D, divide ancora d' e D, e per conseguenza divide il massimo comun divisore d'' di questi due numeri, ch'è pure quello dei numeri proposti.

Esempio. I numeri 360, 600, 1368, 4212, hanno per divisori comuni 2, 3, 4, 6, 12; i quali dividono tutti il massimo comun divisore 12 dei numeri dati.

104*. La ricerca del massimo comun divisore di più numeri interi può, in taluni casi, rendersi più semplice, mediante il seguente:

Teorema V. *Il massimo comun divisore di più numeri non cambia, sostituendo ad uno di essi la differenza tra questo numero e un multiplo di uno degli altri.*

Abbiansi i quattro numeri 360, 600, 1368, 4212. Secondo la regola (102*), bisogna prima cercare il massimo comun divisore di 360 e 600; ora (100*) questo massimo comun divisore è uguale a quello di 360 e 120, differenza fra 600 e 2×360. Dunque il massimo comun divisore dei numeri proposti è uguale a quello dei numeri 360, 120, 1368, 4212.

Secondo la regola (102*) bisogna prima cercare il massimo comun divisore di due numeri, di 360 e di 1368 per esempio; ora (100*) questo massimo comun divisore è uguale a quello di 360 e di 72, differenza fra 1368

e 4×360. Dunque il massimo comun divisore dei numeri proposti è eguale a quello dei numeri 360, 120, 72, 4212.

Un ragionamento analogo permette di sostituire a 4212 la differenza 108 fra 4212 e 12×360. Dunque il massimo comun divisore dei numeri proposti è uguale a quello dei numeri 360, 120, 72, 108, ovvero dei numeri 120, 72, 108, poichè 360 essendo divisibile per 72, sarà 72 il màssimo comun divisore di questi due numeri.

Similmente a 120 e a 108 si possono sostituire le differenze rispettive 24 e 36 fra 2×72, 120 e 108.

Ora è facile vedere che il massimo comun divisore dei numeri 24, 72, 36, è 12.

Quindi possiamo enunciare la regola seguente:

Per cercare il massimo comun divisore di più numeri, si dividono per il più piccolo di essi tutti gli altri numeri; a ciascuno dei numeri divisi si sostituisce la minima differenza corrispondente; si opera al modo stesso sui nuovi numeri così ottenuti, e così di seguito. Quando un numero è divisibile per un altro, si sopprime. L' operazione sarà terminata quando resterà un sol numero; questo numero è il massimo comun divisore cercato.

Questa è la regola generale; ma spesso accade che la semplice ispezione dei numeri proposti rende manifesta una combinazione particolare che facilita considerevolmente l'operazione. Così, nell'esempio proposto, si vede che il quarto numero meno sette volte il secondo dà una differenza 12; quindi al quarto numero si sostituisce 12; e siccome 12 divide i primi tre numeri, 12 è il massimo comune divisore cercato.

Teoremi relativi al massimo comun divisore.

105. Teorema I. *Moltiplicando due o più numeri per uno stesso numero, il loro massimo comun divisore è moltiplicato per questo numero.*

1°. Abbiansi i numeri 7524 e 918. Le divisioni successive necessarie per la ricerca del massimo comun divisore di questi due numeri danno luogo alle seguenti eguaglianze:

$$7524 = 918 \times 8 + 180,$$
$$918 = 180 \times 5 + 18,$$
$$180 = 18 \times 10.$$

Ora è noto (67) che moltiplicando per un medesimo numero il dividendo e il divisore di una divisione, il resto è moltiplicato per questo numero. Quindi moltiplicando 7524 e 918 per un numero qualunque, per esempio per 3, il resto 180 della loro divisione verrà egualmente moltiplicato per 3; similmente moltiplicando per 3, 918 e 180, il resto 18 della loro divisione verrà moltiplicato per 3. Dunque il massimo comun divisore di $3 \times 7524 = 22572$, e di $3 \times 918 = 2754$ è $3 \times 18 = 54$.

2°. Consideriamo adesso più numeri 360, 600, 1368, 4212, il cui massimo comun divisore è 12. Questi quattro numeri moltiplicati per 3, per esempio, diventano 1080, 1800, 4104, 12636; bisogna provare che il loro massimo comun divisore è divenuto 36. In fatti, per ottenere il massimo comun divisore di 360, 600, 1368 e 4212, abbiamo cercato (102') il massimo comun divisore di 360 e 600 che è 120; poi il massimo comun divisore di 120 e 1368 che è 24; poi finalmente il massimo comun divisore di 24 e 4212 che è 12. Se ora consideriamo i numeri 1080, 1800, 4104, 12636, per otte-

nere il loro massimo comun divisore, bisognerà cercare quello di 1080 e 1800 che sarà 3×120; poi quello di 3×120 e 4104 che sarà 3×24; poi finalmente quello di 3×24 e 12636 che sarà 3×12.

Ciò che bisognava dimostrare.

106. Teorema II. *Dividendo due o più numeri per uno stesso numero, il loro massimo comun divisore è diviso per questo numero.*

Questo teorema non è che un'altra maniera di enunciare il teorema precedente. Infatti, invece di dire, moltiplicando per 3 i numeri 360, 600, 1368, 4212, il massimo comun divisore 12 di questi quattro numeri è moltiplicato per 3, si può dire al contrario, dividendo per 3 i numeri 1089, 1800, 4104, 12636, il massimo comun divisore 36 di questi quattro numeri è diviso per 3.

Questo teorema dà il modo di rendere più semplice, in alcuni casi, la ricerca del massimo comun divisore di più numeri. Se, infatti, si vede che i numeri dati ammettono un divisore comune, si divideranno per questo numero, e si cercherà il massimo comun divisore dei quozienti ottenuti. Moltiplicando poscia il resultato pel divisore, si avrà il massimo comun divisore dei numeri proposti.

Esempio. Per cercare il massimo comun divisore di 85200 e 19200, si cercherà il massimo comun divisore di 852 e di 192; il risultato essendo 12, il massimo comun divisore dei numeri proposti è 1200.

107. Osservazione. *Dividendo due o più numeri pel loro massimo comun divisore, il massimo comun divisore sarà diviso per se stesso, e diverrà l'unità.*

Questa proposizione è una conseguenza evidente della precedente.

108*. Non sarà inutile dare una dimostrazione generale del Teorema I.

1°. Siano a e b due numeri interi qualunque, q il quoziente della loro divisione ed r il resto; q' il quoziente della divisione di b per r ed r' il resto; q'' il quoziente della divisione di r per r', ed r'' il resto; q''' il quoziente della divisione di r' per r'', che supponiamo farsi esattamente; r'' è il massimo comun divisore di a e di b. Avremo l' eguaglianze

$$a = b \times q + r,$$
$$b = r \times q' + r',$$
$$r = r' \times q'' + r'',$$
$$r' = r'' \times q'''.$$

Ciò posto, moltiplichiamo a e b per un numero qualunque m, il resto r della loro divisione sarà anche moltiplicato per questo numero. b ed r essendo così moltiplicati per m, il resto r' della loro divisione sarà moltiplicato per m. Similmente infine, r ed r' essendo moltiplicati per m, il resto r'' della loro divisione, che è il massimo comun divisore di a e di b, sarà moltiplicato per m.

Osserviamo ancora che l' eguaglianze precedenti possono servire a dimostrare con generalità tutti i teoremi che abbiamo dati sul massimo comun divisore di due numeri.

2°. Abbiansi quattro numeri A, B, C, D. Siano, d il massimo comun divisore di A e di B, d' il massimo comun divisore di d e di C, d'' il massimo comun divisore di d' e di D: sappiamo che d'' è il massimo comun divisore dei quattro numeri A, B, C, D.

Ciò posto, moltiplichiamo A, B, C, D per uno stesso numero m. A e B essendo moltiplicati per m, il loro massimo comun divisore d sarà anche moltiplicato per m; d e C essendo moltiplicati per m, il loro massimo comun divisore d' sarà moltiplicato per m; infine d' e D essendo moltiplicati per m, il loro massimo comun di-

visore d'', ch'è egualmente quello dei numeri proposti, sarà moltiplicato per m.

Limite del numero di divisioni alle quali può condurre la ricerca del massimo comun divisore.

109. Teorema I. *Nella ricerca del massimo comun divisore di due numeri, ciascun resto è minore della metà di quello che lo precede di due posti.*

Indichiamo con R ed R' due resti consecutivi. Se, secondo la regola generale, si divide R per R', si ottiene un nuovo resto R''; vogliamo provare che R'' è minore della metà di R.

Sia Q il quoziente della divisione di R per R', avremo

$$R = Q \times R' + R''.$$

Il quoziente Q è almeno eguale ad 1, dunque R è almeno eguale a $R'+R''$; ma necessariamente il divisore R' è maggiore di R'', dunque

$$R > R''+R'', \quad \text{ovvero} \quad R > 2R'',$$

ciò che bisognava dimostrare.

110. Teorema II. *Si avrà un limite del numero di divisioni da effettuare nella ricerca del massimo comun divisore di due numeri* A *e* B, *formando la serie,* 2, 4, 8, 16, ..., *delle potenze di* 2, *e prendendo il doppio del posto del primo dei termini di questa serie che supera il più piccolo* B *dei numeri proposti.*

Siano infatti

$$R,\ R',\ R'',\ R''',\ R^{\text{v}}\ .....$$

i resti ottenuti successivamente. Dal teorema precedente si ha

$$B > 2R', \quad R' > 2R''', \quad R''' > 2R^{\text{v}}\ ....,$$

e per conseguenza a più forte ragione

$$B > 4R''', \quad \text{ovvero} \quad B > 2^2R''',$$
$$B > 8R^{v}, \quad \text{ovvero} \quad B > 2^3R^{v};$$

continuando a questo modo si vede facilmente che B è maggiore del prodotto della *ennesima* potenza di 2 pel resto che occupa il posto $2n$. Dunque se 2^n è $> B$, è impossibile fare più di $2n$ divisioni.

Applichiamo questa regola ai numeri 377 e 233.

A quest'oggetto, formiamo le potenze di 2, sino a che se ne trovi una superiore a 233; queste potenze sono

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256.

L'ottava potenza di 2, 256 essendo maggiore di 233, si vede che la nostra regola indica il limite 16 pel numero delle divisioni da eseguire. Facendo il calcolo, si trova che il numero di queste divisioni è 12.

Esercizi.

I. Dimostrare che il massimo comune divisore di due numeri A, B è eguale al numero dei multipli di B contenuto nella serie

$$A, \; A\times 2, \; A\times 3, \; \ldots\ldots, \; A\times B.$$

II. Formando la serie 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., di cui ciascun termine è la somma dei due precedenti, è impossibile che nell'operazione del massimo comun divisore, più di due resti consecutivi cadano tra due stessi termini della serie, e se ne cadono due non ve ne sarà nessuno nell'intervallo seguente.

III. Fondandosi sulla proposizione precedente e su quella che è stata enunciata (Cap. I, *Esem.* III), si può provare che l'operazione del massimo comun divisore esige un numero di divisioni eguale al più a cinque volte il numero delle cifre del minore dei due numeri.

CAPITOLO VII.

TEORIA DEI NUMERI PRIMI.

—

Definizioni.

111. Un numero intero è detto primo quando non ha altri divisori interi che sè stesso e l'unità.

Esempi. 2, 3, 5, 7, sono numeri primi; 9 non è primo, perchè è divisibile per 3.

Due numeri son detti primi fra loro, quando il loro massimo comun divisore è l'unità.

112. Osservazione. *Un numero primo è primo con tutti i numeri interi che non sono suoi multipli,* poichè non avendo altri divisori che sè stesso e l'unità, il suo solo comun divisore con un numero che egli non divide, è evidentemente l'unità.

Teoremi relativi ai numeri primi.

113. Teorema I. *Un numero intero che non è primo, ammette almeno un divisore primo.*

Se infatti un numero non è primo, ammette uno o più divisori diversi da sè stesso e dall'unità: ora è evidente che il minore di questi divisori è primo, poichè se non fosse tale, ammetterebbe un divisore più piccolo che dovrebbe dividere il numero proposto.

Abbiasi per esempio il numero 1261, supponiamo che il più piccolo dei suoi divisori (astrazion fatta dall'unità) sia 97; è chiaro che 97 è primo, poichè se egli avesse un divisore, 13 per esempio, 13 dividendo 97 dovreb-

be (76) dividere il suo multiplo 1261, e 97 non sarebbe per conseguenza il minor divisore di 1261.

114. Osservazione. Un numero primo essendo divisore di sè stesso, ammette un divisore primo: possiamo dunque modificare il teorema precedente dicendo: *qualunque numero, primo o no, ammette almeno un divisore primo.*

115. Teorema II. *Se due numeri non sono primi fra loro, essi hanno almeno un divisore primo comune.* In fatti, se due numeri non sono primi fra loro, essi ammettono per definizione un divisore comune diverso dall'unità; questo divisore (114) ammette egli pure un divisore primo che divide evidentemente i due numeri proposti.

116. Teorema III. *La serie dei numeri primi è illimitata.*

Supponiamo, se è possibile, che N esprima il maggiore dei numeri primi. Formiamo il prodotto di tutti i numeri primi da 2 fino a N, e aggiungiamo una unità a questo prodotto

$$2\times3\times5\times7......\times N+1.$$

Se nominiamo S il resultato così ottenuto, S ammette un divisore primo (114). Ora, questo divisore dev'essere maggiore di N, poichè altrimenti entrerebbe come fattore nella prima parte di S, e dovrebbe, per conseguenza (77), dividere la seconda, che è 1, lo che è impossibile. Dunque necessariamente v'è un numero primo maggiore di N, e l'ipotesi che abbiamo fatta non può ammettersi.

Formazione di una tavola dei numeri primi.

117. Per formare una tavola di numeri primi, si scrive la serie dei numeri interi, e si cancellano quelli che non sono primi. Scriviamo la serie:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, ...

1°. I numeri divisibili per **2**, eccettuato **2**, non sono primi; dobbiamo dunque cancellare di due in due tutti i termini di questa serie, cominciando dal **2** esclusivamente.

2°. I numeri divisibili per **3**, eccettuato **3**, non sono primi; dobbiamo dunque cancellare di tre in tre tutti i termini che vengon dopo, cominciando dal **3** esclusivamente. Così cancelleremo dei numeri, come **6**, già cassati come multipli di **2**, ma ciò non ha alcun inconveniente.

3°. I multipli di **4**, essendo anche multipli di **2**, sono già stati cancellati. Dunque casseremo i multipli di **5**, cioè cancelleremo i numeri di **5** in **5**, cominciando dal **5** esclusivamente.

4°. Di poi cancelleremo i numeri, non di **6** in **6**, perchè sarebbe inutile, ma di **7** in **7** cominciando da **7** esclusivamente, e così toglieremo tutti i multipli di **7**.

Continueremo nella stessa maniera, osservando sempre che è inutile di cancellare i multipli dei numeri che non sono primi.

118. Osservazione I. Si potrebbe credere necessario di conoscer già la lista dei numeri primi per cancellare i loro multipli. Ma l'operazione darà questi numeri a misura che ne avremo bisogno.

119. Supponiamo che, mediante le operazioni che abbiamo indicate, si siano cancellati nella serie naturale dei numeri tutti i multipli di 2, di 3, di 5 e di 7; è chiaro che dei numeri non cancellati, taluni sono primi altri no; ora voglio provare che è primo qualunque numero non cancellato, minore del quadrato del numero primo 11, immediatamente superiore a 7. Prendiamo, infatti, un numero qualunque A minore di 11×11. Se questo numero non è primo, abbiamo dimostrato (113) che il minimo dei suoi divisori sarà primo. Ora il minimo numero primo che può dividere A è 11, perchè se A non è stato cancellato ciò è provenuto dal non essere divisibile per 2, per 3, per 5, per 7. Dunque se A non è primo, il minimo dei suoi divisori sarà eguale almeno a 11. L'altro divisore di A dovrebbe essere o eguale o maggiore di 11; ma ciò è impossibile, perchè $A < 11 \times 11$; dunque l'ipotesi fatta che A non sia primo è inammissibile.

Questa dimostrazione è generale; e un simile ragionamento proverebbe egualmente che dopo avere scancellati i numeri di 11 in 11, possiamo riguardare come primi i numeri non scancellati minori del quadrato di 13, e in generale che dopo avere scancellati i multipli d'un dato numero primo, possiamo riguardare come primi i numeri non scancellati minori del quadrato del numero primo immediatamente superiore.

120. Osservazione II. Giovandosi delle precedenti considerazioni è facile decidere se un numero è primo o no; basterà infatti dividerlo successivamente pei numeri primi 2, 3, 5, 7, ..., i cui quadrati sono minori di esso; se queste divisioni non riescono, il numero proposto è primo.

Avvertiremo che il quadrato del divisore provato è maggiore del dividendo, quando il quoziente diverrà

minore del divisore; poichè chiamando N il dividendo e P il divisore, se N è minore di P^2 il quoziente sarà minore di P.

121*. Crediamo utile aggiungere qui le seguenti considerazioni.

Indichiamo con n un numero qualunque, che può essere 0, 1, 2, 3, ...; è chiaro che qualunque numero intero si trova compreso nelle due espressioni

$$2\times n, \qquad 2\times n\pm1;$$

la prima dà tutti i numeri pari; la seconda, tutti i numeri dispari.

Del resto tutti i numeri interi possono essere rappresentati in più modi. Così le espressioni

$$3\times n, \qquad 3\times n\pm1,$$
$$4\times n, \qquad 4\times n\pm1, \text{ ec.}$$

possono servire egualmente a rappresentare tutti i numeri interi.

Tutti i numeri primi, eccetto 2 e 3, sono poi compresi nell'espressione

$$6\times n\pm1;$$

cioè a dire che *qualunque numero primo, eccetto* 2 *e* 3, *è un multiplo di* 6 *aumentato o diminuito di una unità.*

La dimostrazione seguente è di Serret.

Il numero 5 essendo eguale a 6—1 soddisfa a questa condizione. Sia A un numero maggiore di 6. I resti della divisione di A per 6 possono essere 0, 1, 2, 3, 4, 5; se il resto è 0, A è divisibile per 6; se il resto è 2 o 4, A è divisibile per 2; se il resto è 3, A è divisibile per 3. Dunque se A è primo, il resto della divisione di A per 6 dev' essere 1 o 5. Ora, se A diviso per 6 dà per resto 1, è uguale a un multiplo di 6 aumentato di 1; se A diviso

per 6 dà per resto 5, è uguale a un multiplo di 6 più 5, o, ciò ch'è lo stesso, a un multiplo di 6 diminuito di 1.

Conviene però avvertire che non tutti i numeri compresi nell'espressione $6\times n\pm1$ sono primi. Per esempio 49 è della forma $6\times n+1$ e non è primo.

122*. Da lungo tempo si sono costruite delle Tavole di numeri primi, vista la loro importanza non solamente pei matematici di professione ma ancora pei calcolatori pratici. Le più conosciute sono quelle di *Chernac* e di *Burckhardt;* recentemente in Weimar ne ha pubblicata una più economica il sig. Schaller. Le Tavole di *Chernac* contengono i numeri primi e i divisori degli altri numeri sino a 100000. Quelle di Burckhardt contengono i numeri primi da 1 a 3036000 e i più piccoli divisori degli altri numeri. Dall'ispezione di queste Tavole risulta, che vi sono 26 numeri primi da 1 a 100; 169 da 1 a 1000; 1230 da 1 a 10000; 9592 da 1 a 100000; e 78493 da 1 a 1000000.

Trascriviamo qui una tavola dei numeri primi da 3 a 1229; alla quale, per completarla, fa d'uopo aggiungere i numeri primi 1 e 2.

Tavola dei numeri primi fino a 1229.

3	79	181	293	421	557	673	821	953	1091
5	83	191	307	431	563	677	823	967	1093
7	89	193	311	433	569	683	827	971	1097
11	97	197	313	439	571	691	829	977	1103
13	101	199	317	443	577	701	839	983	1109
17	103	211	331	449	587	709	853	991	1117
19	107	223	337	457	593	719	857	997	1123
23	109	227	347	461	599	727	859	1009	1129
29	113	229	349	463	601	733	863	1013	1151
31	127	233	353	467	607	739	877	1019	1153
37	131	239	359	479	613	743	881	1021	1163
41	137	241	367	487	617	751	883	1031	1171
43	139	251	373	491	619	757	887	1033	1181
47	149	257	379	499	631	761	907	1039	1187
53	151	263	383	503	641	769	911	1049	1193
59	157	269	389	509	643	773	919	1051	1201
61	163	271	397	521	647	787	929	1061	1213
67	167	277	401	523	653	797	937	1063	1217
71	173	281	409	541	659	809	941	1069	1223
73	179	283	419	547	661	811	947	1087	1229

Teoremi relativi alla teoria dei numeri primi.

123. Teorema IV. *Un numero che divide un prodotto di due fattori ed è primo con uno dei fattori, divide necessariamente l' altro.*

Sia P un numero primo con A, che divide il prodotto $A \times B$; bisogna provare che divide B.

L' unità è per ipotesi il massimo comun divisore di P e di A; moltiplicando questi due numeri per B, il loro massimo comun divisore (105) sarà moltiplicato per B, e diverrà per conseguenza eguale a B; dun-

que il massimo comun divisore di $P \times B$ e di $A \times B$ è B; ora, P divide evidentemente $P \times B$, divide pure, per ipotesi, $A \times B$; esso divide dunque (99) il loro massimo comun divisore B. Ciò che bisognava dimostrare.

124. TEOREMA V. *Un numero primo che divide un prodotto di due fattori, divide necessariamente uno dei fattori.*

Sia P un numero primo che divide un prodotto $A \times B$. Se P, essendo primo, non divide A, è primo con esso (111), e quindi, pel teorema precedente, divide B. Dunque P divide A o B in tutti i casi.

125. TEOREMA VI. *Un numero primo che divide un prodotto di più fattori, divide necessariamente uno dei fattori.*

Consideriamo, per esempio, un prodotto di quattro fattori $A \times B \times C \times D$, divisibile per un numero primo P; questo prodotto potendo essere considerato come formato di due fattori $(A \times B \times C)$ e D, se P non divide D (124) divide $A \times B \times C$; ma questo nuovo prodotto potendo pure esser considerato come composto di due fattori $(A \times B)$ e C, se P non divide C deve dividere $A \times B$, e per conseguenza A o B. P divide dunque, in tutti i casi, uno dei quattro fattori.

126. OSSERVAZIONE I. *Un numero primo che divide una potenza di un numero, divide questo numero.*

Questa proposizione è una conseguenza evidente del teorema precedente.

127. OSSERVAZIONE II. *Un numero primo che divide un prodotto di fattori primi, è necessariamente eguale a uno di essi.*

Poichè per dividere il prodotto, deve (125) dividere uno dei fattori, e questi fattori essendo primi, non sono divisibili che per se stessi e per l' unità.

128. Teorema VII. *Un numero che è primo con tutti i fattori di un prodotto è primo col prodotto; e reciprocamente, un numero primo con un prodotto è primo coi fattori di questo prodotto.*

1°. Sia un prodotto $A \times B \times C \times D$, e P un numero primo con ciascuno dei fattori A, B, C e D. Se P e $A \times B \times C \times D$ non fossero primi fra loro, avrebbero (115) almeno un divisore primo comune K. K essendo primo e dividendo il prodotto $A \times B \times C \times D$ dividerà (125) almeno uno dei fattori di questo prodotto, A, per esempio; ma allora A e P hanno il divisore comune K, e contro all'ipotesi, non sono primi fra loro. V'è dunque contradizione ad ammettere che P e $A \times B \times C \times D$ abbiano un divisore comune.

2°. Sia P un numero primo col prodotto $A \times B \times C \times D$; dico che P è primo con ciascuno dei fattori A, B, C, D, E invero, supponiamo che P ed A non siano primi tra di loro; essi avranno un divisore comune K. K dividendo A dividerà il suo multiplo $A \times B \times C \times D$; e quindi P non sarebbe primo col prodotto $A \times B \times C \times D$, lo che è contrario all'ipotesi.

129. Osservazione I. *Un numero primo che non divide un numero non può dividere le sue potenze; e reciprocamente un numero primo che non divide una potenza di un numero non può dividere questo numero.*

Questa proposizione è una conseguenza evidente del teorema precedente.

130. Osservazione II. *Le potenze di due numeri primi tra di loro, sono anche prime tra loro.*

Infatti, se due numeri sono primi tra loro, due qualunque delle loro potenze non avranno fattori primi comuni e saranno per conseguenza prime fra loro.

Di questa proposizione può darsi anche un'altra dimostrazione, per taluni forse più chiara.

Siano A e B due numeri primi tra loro; le potenze A^3 e B^5 sono anche prime tra loro. E invero se ciò non è, indichiamo con D un divisore comune di queste due potenze. D dividendo A^3, divide A (126); e dividendo B^5, divide B; quindi A e B avrebbero un divisore comune D, ciò ch'è contrario all'ipotesi.

131. Teorema VIII. *Un numero divisibile per più altri primi fra loro due a due, è divisibile per il loro prodotto.*

Sia N un numero divisibile per molti altri, $A, B, C,$ primi fra loro due a due. N essendo divisibile per A, si avrà, indicando con Q un quoziente intero

$$N = A \times Q;$$

il prodotto $A \times Q$ essendo eguale a N, sarà divisibile per B, e per conseguenza B essendo primo con A dovrà (123) divider Q, di maniera che indicando con Q_1 un quoziente intero, si avrà

$$Q = Q_1 \times B;$$

sostituendo questo valore di Q nell'espressione di N, questa diviene

$$N = A \times B \times Q_1.$$

Il prodotto $A \times B \times Q_1$, essendo eguale a N, sarà divisibile per C; ma il numero C è primo con A e B, dunque lo sarà con $A \times B$ (128), e per conseguenza, dovrà (123) dividere Q_1; si avrà dunque, indicando con Q_2 un quoziente intero,

$$Q_1 = Q_2 \times C.$$

Sostituendo questo valore di Q_1 nell'espressione di N, questa diviene

$$N = A \times B \times C \times Q_2,$$

lo che dimostra la proposizione enunciata.

Osservazione.* Da questo teorema e da quelli dimostrati nel Cap. V, si possono dedurre le condizioni di divisibilità dei numeri per $2\times3, 5\times3, 2\times9, 5\times9, 2\times11, 5\times11, 9\times11, 2\times3\times11$, ec. Per esempio, 66 essendo il prodotto dei numeri **2**, **3** e **11** che sono primi tra loro, perchè un numero sia divisibile per 66, è necessario e sufficiente che sia divisibile per **2**, per **3** e per **11**. Quindi la condizione di divisibilità di un numero per **66** è che la somma delle sue cifre sia divisibile per **3**, che la somma delle sue cifre di posto dispari e delle differenze da **11** delle sue cifre di posto pari sia divisibile per **11**, e finalmente che la cifra delle unità sia **0**, **2**, **4**, **6**, o **8**.

Riduzione di un numero in fattori primi.

132. Teorema I. *Qualunque numero non primo è eguale a un prodotto di fattori primi.* Lo che si esprime dicendo *che si risolve in fattori primi.*

Indichiamo con N un numero non primo. Questo numero ha almeno (113) un divisore primo P, e per conseguenza, chiamando Q il quoziente della divisione di N per P, avremo

$$N = P \times Q.$$

Se Q è primo la proposizione è dimostrata; N è il prodotto di due numeri primi. Se Q non è primo, ha (113) almeno un divisore primo P_1; per conseguenza Q_1 indicando un quoziente intero,

$$Q = P_1 \times Q_1.$$

Sostituendo questo valore di Q nell' eguaglianza precedente, si ha

$$N = P \times P_1 \times Q_1.$$

Se Q_1 è primo, la proposizione è dimostrata, N è il prodotto di tre numeri primi; se non lo fosse, esso ha

almeno un divisore primo P_2; per conseguenza nominando Q_2 un quoziente intero,

$$Q_1 = P_2 \times Q_2.$$

Sostituendo questo valore di Q_1 nell'eguaglianza precedente, si ha

$$N = P \times P_1 \times P_2 \times Q_2.$$

Continueremo così fino a che uno dei quozienti Q, Q_1, Q_2, sia primo; la qual cosa non può non accadere dopo un certo numero di operazioni, poichè altrimenti, questi numeri interi, che sono decrescenti, formerebbero una serie illimitata, lo che è impossibile.

133. Osservazione. Nella dimostrazione precedente, nulla fa supporre che i numeri indicati da P, P_1, P_2 abbiano valori diversi. Il medesimo fattore può figurare più volte nel prodotto.

Esempio. Applichiamo il ragionamento precedente al numero 60:

1°. 60 ammette il divisore primo 2, e si ha

$$60 = 2 \times 30;$$

2°. 30 ammette il divisore primo 2, e si ha

$$30 = 2 \times 15,$$

per conseguenza,

$$60 = 2 \times 2 \times 15;$$

3°. 15 ammette il divisore primo 3, e si ha

$$15 = 3 \times 5,$$

per conseguenza,

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5;$$

5 essendo primo, l'operazione è terminata.

134*. Teorema II. *Un numero non può risolversi in fattori primi che in una sola maniera.*

Siano infatti $A\times B\times C\times D$..... e $a\times b\times c\times d$...., due prodotti di fattori primi che rappresentino uno stesso numero N. Dovrà aversi $A\times B\times C\times D$..... $=a\times b\times c\times d$..... Ora il numero primo a dividendo il prodotto $a\times b\times c\times d$.... deve anche dividere il prodotto eguale $A\times B\times C\times D$....., e quindi (127) dev' essere eguale ad uno dei fattori A, B, C, D, ... Supponiamo che sia $a=A$. Sopprimendo questi fattori eguali, otterranno una nuova eguaglianza $B\times C\times D$..... $=b\times c\times d$...., dalla quale in un modo analogo si dedurrà che b dev' essere eguale a uno dei fattori B, C, D, ...; e così di seguito. Dunque i fattori dei due prodotti sono eguali ciascuno a ciascuno. Ed è questo che bisognava dimostrare.

135. Osservazione. La riduzione in fattori primi costituisce un vero sistema di numerazione dei numeri interi per mezzo del quale tutti possono essere espressi, e non possono esserlo che in una sola maniera. Questo sistema, assai incomodo per le operazioni le più semplici, si presta qualche volta agevolmente alle operazioni più complicate dell' aritmetica. Noi esporremo qualcuna delle sue applicazioni; ma prima bisogna indicare il modo di risolvere un numero in fattori primi, poichè, fino ad ora, ci siamo limitati soltanto a mostrarne la possibilità.

Modo di risolvere un numero in fattori primi.

136. Per risolvere un numero in fattori primi, si prendono i numeri primi per ordine di grandezza, e si prova se dividono questo numero. Quando una divisione riesce, si effettua, e nelle operazioni seguenti il quoziente è sostituito al numero proposto. Una seconda divisione che riesce permette di sostituire a questo quoziente un numero più semplice ancora, e si continua fino

a che si trovi un quoziente primo. Questo quoziente è l'ultimo dei fattori che si cerca, e gli altri sono i divisori successivamente impiegati. Basterà un esempio a rendere questo metodo più chiaro.

Debbasi risolvere in fattori primi il numero 25480: si provi in prima il divisore 2, la divisione riesce e dà per quoziente 12740. Si ha dunque:

$$25480 = 12740 \times 2.$$

Si provi la divisione di 12740 per 2, che riesce ancora e dà per quoziente 6370. Si ha dunque:

$$12740 = 6370 \times 2,$$

per conseguenza

$$25480 = 6370 \times 2 \times 2;$$

6370 è ancora esso divisibile per 2, e si ha:

$$6370 = 3185 \times 2;$$

per conseguenza

$$25480 = 3185 \times 2 \times 2 \times 2;$$

3185 non è divisibile nè per 2, nè per 3, ma per 5, e si ha:

$$3185 = 637 \times 5,$$

per conseguenza

$$25480 = 637 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2;$$

637 non è divisibile per 5, ma lo è per 7, e si ha:

$$637 = 91 \times 7,$$

per conseguenza

$$25480 = 91 \times 7 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2;$$

91 è egualmente divisibile per 7, e si ha:

$$91 = 13 \times 7,$$

per conseguenza

$$25480 = 13 \times 7 \times 7 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2;$$

13 essendo numero primo, l' operazione è effettuata.

Questa eguaglianza può ancora scriversi

$$25480 = 13 \times 7^2 \times 5 \times 2^3.$$

L' operazione si dispone ordinariamente nel seguente modo:

25480	2
12740	2
6370	2
3185	5
637	7
91	7
13	13

Osservazione I. Lo stesso divisore va provato più volte di séguito, come nell' esempio precedente i divisori 2 e 7, fino a che cessi di dare un quoziente intero. Ma poscia, non bisogna più provarlo, perchè i quozienti successivi essendo divisori gli uni degli altri, un numero che non divide uno di essi non può dividere i seguenti.

Osservazione II. Quando si vedono due fattori di cui un numero è il prodotto, si possono risolvere separatamente e riunire i resultáti in un solo prodotto.

Esempio. Sia da risolvere il numero 2400. $2400 = 24 \times 100$. Basta dunque risolvere 24 e 100; ma $24 = 4 \times 6$, $4 = 2 \times 2$, $6 = 2 \times 3$, dunque $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$, $100 = 10 \times 10 = 2 \times 5 \times 2 \times 5$. Infine abbiamo:

$$2400 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 = 2^5 \times 3 \times 5^2.$$

Condizione affinchè due numeri sieno divisibili l' uno per l' altro.

137. *Perchè due numeri sieno divisibili l'uno per l'altro, è necessario e sufficiente che il dividendo contenga tutti i fattori primi del divisore elevati ad un esponente per lo meno eguale.*

1°. Questa condizione è necessaria: se infatti s' immagina che il dividendo, il divisore e il quoziente sieno risoluti in fattori primi, il dividendo essendo il prodotto del divisore per il quoziente, è il prodotto di tutti i fattori di questi due numeri. Tutti i fattori del divisore debbono dunque trovarsi nel dividendo elevati ad un esponente almeno eguale.

2°. Questa condizione è sufficiente: se infatti essa è sodisfatta, il quoziente sarà intero ed eguale al prodotto dei fattori che si trovano nel dividendo senza trovarsi nel divisore, per quelli che entrano nell' uno e nell' altro elevati ad un esponente eguale alla differenza degli esponenti dei fattori corrispondenti.

Esempio. $3^3 \times 7^2 \times 13^4 \times 19^2 \times 37$ diviso per $3^3 \times 13^2 \times 19$ darà per quoziente $7^2 \times 13^2 \times 19 \times 37$, poichè unendo questi fattori a quelli del divisore si avranno, come nel dividendo, tre fattori 3, due fattori 7, quattro fattori 13, due fattori 19, e un fattore 37.

Composizione del massimo comun divisore di più numeri.

138. Dalla proposizione precedente resulta che i fattori primi dei divisori comuni a più numeri debbono essere comuni a questi numeri, e che i loro esponenti sono *al più* eguali a quelli che essi hanno nel numero, dove si trovano coll'esponente minore. Il massimo comun

divisore è dunque il prodotto dei fattori primi comuni, presi con esponenti *precisamente* eguali a quelli che essi hanno nel numero dove appariscono coll' esponente minore.

Esempio. Sieno i numeri $2^3 \times 5^2 \times 19 \times 37^2$, $2^2 \times 7 \times 19^3 \times 37^4 \times 57$, $2^4 \times 11^2 \times 19 \times 37$; i soli fattori primi comuni a questi tre numeri sono 2, 19 e 37, 2 è contenuto 2 volte, e i due altri numeri sono contenuti una sola volta come fattori in quello dei numeri dove si trovano col minimo esponente. Il massimo comun divisore è dunque $2^2 \times 19 \times 37$.

Osservazione I. La maggior parte dei teoremi relativi al massimo comun divisore di due o più numeri, dimostrati nel Capitolo VI, divengono quasi evidenti quando questi numeri si rappresentano come risoluti in fattori primi. Tuttavia noi non svolgeremo questo modo di dimostrazione, perchè pensiamo che l' uso delle considerazioni di questo genere è una delle cause della difficoltà che gli scolari trovano nell' estendere a quantità qualunque le proposizioni relative ai numeri interi.

139. Osservazione II. *Il massimo comun divisore di due numeri non si altera moltiplicando o dividendo uno di essi per un fattore primo con l' altro,* poichè con ciò non si introduce nè si sopprime alcun fattore primo comune. Se dunque nella ricerca del massimo comun divisore vien fatto di scorgere dei fattori primi comuni a due resti successivi, questi fattori si potranno sopprimere.

Formare tutti i divisori di un numero.

140. Abbiasi il numero $3 \times 7^3 \times 11^4 \times 13^2$. I divisori di questo numero (136) hanno per fattori primi 3, 7, 11

e 13; il primo non entra più di una volta, il secondo non più di tre volte, il terzo non più di quattro volte, e il quarto non più di due volte. Se dunque scriviamo la tavola seguente:

$$\begin{array}{llll} 3 & & & \\ 7 & 7^2 & 7^3 & \\ 11 & 11^2 & 11^3 & 11^4 \\ 13 & 13^2 & & \end{array}$$

moltiplicando due a due, tre a tre, o quattro a quattro, i numeri presi in colonne orizzontali differenti, e aggiungendo a questi prodotti i numeri inscritti nella tavola stessa, avremo tutti i divisori del numero proposto.

Scrivendo l'unità in ciascuna colonna orizzontale della tavola, si dà più regolarità all'operazione, che diventa quindi:

$$\begin{array}{lllll} 1 & 3 & & & \\ 1 & 7 & 7^2 & 7^3 & \\ 1 & 11 & 11^2 & 11^3 & 11^4 \\ 1 & 13 & 13^2 & & \end{array}$$

Dopo questa aggiunta, possiamo dire che *tutti* i divisori si otterranno moltiplicando quattro fattori presi respettivamente nelle quattro linee orizzontali; poichè per formare quelli nei quali non entrano uno o più fattori primi 3, 7, 11, o 13, basterà prendere l'unità per fattore nelle linee corrispondenti.

Per formare questi divisori, si procederà nella maniera seguente: si moltiplicheranno i numeri della prima linea per quelli della seconda: ciò che nel caso attuale darà otto prodotti. Si moltiplicheranno questi otto prodotti per i cinque numeri della terza linea, lo che darà 5 volte 8 o 40 prodotti, che bisognerà moltiplicare pei tre numeri della quarta linea, ciò che darà in tutto 3 volte 40 o 120 prodotti, che sono i soli divisori del numero proposto.

In generale, *per formare tutti i divisori di un numero, si risolvono in fattori primi e formasi una tavola composta di una serie di linee orizzontali, che cominciano tutte per l' unità e che contengono le diverse potenze di ciascuno di questi fattori primi, fino a quella che figura nel numero proposto; in seguito si moltiplicano tutti i numeri della prima linea per tutti quelli della seconda, poi ciascuno di questi prodotti per quelli della terza linea, e così di seguito; gli ultimi prodotti ottenuti moltiplicando pei numeri scritti nell' ultima linea della tavola sono tutti i divisori cercati.*

Numero dei divisori di un numero intero.

141. Abbiasi un numero intero N decomposto in fattori primi nella maniera seguente:

$$N = a^{\alpha} \times b^{\beta} \times c^{\gamma},$$

a, b e c sono fattori primi e i loro esponenti sono indicati dalle lettere α, β, γ.

Se conformemente alla regola precedente, si forma la tavola:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & . & a & . & a^2 & . & a^3 & . & . & a^{\alpha} \\ 1 & & b & & b^2 & & b^3 & . & . & b^{\beta} \\ 1 & & c & & c^2 & & c^3 & . & . & c^{\gamma}, \end{array}$$

la prima linea conterrà $\alpha+1$ termini, la seconda, $\beta+1$ termini, e la terza $\gamma+1$. Quindi moltiplicando i termini della prima linea per quelli della seconda, avremo in tutto $(\alpha+1)\times(\beta+1)$ prodotti; ciascuno di questi prodotti moltiplicato per i termini della terza linea, produrrà $\gamma+1$ prodotti; il loro numero sarà dunque moltiplicato per $\gamma+1$, e diverrà:

$$(\alpha+1)\times(\beta+1)\times(\gamma+1),$$

tal è dunque il numero dei divisori. In generale, *il numero totale dei divisori di un numero si ottiene, aggiungendo una unità agli esponenti dei fattori primi, e formando il prodotto dei numeri così ottenuti.*

OSSERVAZIONE I. Nel numero $(\alpha+1)\times(\beta+1)\times(\gamma+1)$ dei divisori vi ha l'unità che si ottiene moltiplicando i primi termini delle differenti linee, e il numero stesso che resulta dalla moltiplicazione degli ultimi termini.

142. OSSERVAZIONE II. *Il numero dei divisori di un numero è pari, a meno che i fattori primi di questo numero non abbiano tutti esponenti pari.* Se, infatti, all'esponente di uno dei fattori primi, supposto impari, si aggiunge una unità, la somma sarà pari, e, per conseguenza, il numero dei divisori, nella cui espressione questa somma entra come fattore, sarà divisibile per 2. Vedremo in seguito che i numeri di cui tutti i fattori primi hanno esponenti pari sono quadrati. La proposizione precedente può dunque enunciarsi, dicendo:

Il numero totale dei divisori di un numero è pari, a meno che questo numero non sia un quadrato perfetto.

Si può dare *a priori* la ragione del teorema precedente.

Il numero totale dei divisori di un numero è pari perchè è doppio del numero di maniere nelle quali si può risolvere questo numero in un prodotto di due fattori. Consideriamo per esempio il numero 60. Qualunque divisore di 60 può essere considerato come uno dei fattori di un prodotto eguale a 60; ma a ciascuna riduzione di 60 in un prodotto, corrispondono due divisori. Se si ha, per esempio,

$$60=4\times15,$$

ciò prova infatti, che 60 diviso per 4, dà per quoziente 15, e che 60 diviso per 15, dà per quoziente 4. 4 e 15 sono

dunque due divisori di 60; si vede che il numero totale dei divisori è doppio del numero di riduzioni possibili. Il ragionamento è generale. Non v'è eccezione che nel caso in cui il numero considerato è un quadrato. Poichè quando i due fattori del prodotto divengono eguali non dobbiamo contarli che per uno nell'enumerazione dei divisori.

143. Osservazione. I due divisori che formano un gruppo, hanno per prodotto il numero considerato, che in conseguenza è più grande del quadrato del minore, e minore del quadrato del più grande. Da ciò resulta che fra i divisori di un numero, la metà hanno un quadrato minore, e l'altra metà un quadrato maggiore di questo numero.

Multipli comuni a due numeri.

144. Un numero divisibile per molti altri si chiama loro multiplo comune; la conoscenza dei multipli comuni a molti numeri è spesso utile, e particolarmente quella del minimo tra essi che chiamasi il loro minimo multiplo comune. Questa teoria sarà da noi esposta nel presente capitolo avendo riguardo ai soli numeri interi, riserbandoci di renderla più generale dopo lo studio delle frazioni.

145. Teorema. *Indicando due numeri interi con le lettere* A *e* B, *con* D *il loro massimo comun divisore, e con* Q *e* Q' *i quozienti ottenuti dividendo* A *e* B *per* D, *qualunque multiplo comune a questi numeri è un multiplo del prodotto* $D \times Q \times Q'$. Infatti si ha:

$$A = D \times Q, \quad B = D \times Q'.$$

Indicando con m un numero intero, i multipli di A sono tutti della forma $m \times A$, cioè a dire $m \times D \times Q$. Per

vedere se questo prodotto è anche multiplo di B, bisogna vedere se esso è divisibile per B, cioè a dire per $D \times Q'$. La divisione di $m \times D \times Q$ per $D \times Q'$ potrà effettuarsi dividendo prima $m \times D \times Q$ per D, poi il risultato per Q'. La divisione per D dà per quoziente $m \times Q$, che dev' essere divisibile per Q'; ma Q' è primo con Q, dunque (123) deve dividere il fattore m, e per conseguenza, k essendo un numero intero,

$$m = k \times Q';$$

sostituendo ad m questo valore, si ottiene per la forma più generale che possa avere un multiplo comune ai due numeri A e B,

$$k \times D \times Q \times Q',$$

ciò che dimostra la proposizione enunciata.

È poi evidente che questa espressione rappresenta, quale che siasi k, un multiplo comune ad A e B; giacchè dividendola per $D \times Q$ e $D \times Q'$, i quozienti ottenuti sono rispettivamente i numeri interi $k \times Q'$ e $k \times Q$.

146. Osservazione. Il minimo multiplo comune corrisponderà al valore $k = 1$, ed è, per conseguenza, $D \times Q \times Q'$. Il prodotto dei numeri A e B è uguale a $D \times D \times Q \times Q'$, e il quoziente della sua divisione per D è evidentemente il minimo multiplo comune che abbiamo ottenuto. Possiamo dunque enunciare i teoremi seguenti:

1°. *Il minimo multiplo comune a due numeri è uguale al prodotto di questi due numeri diviso pel loro massimo comun divisore;*

2°. *Gli altri multipli comuni sono i multipli del minimo.*

Se i due numeri dati sono primi tra loro, è chiaro che il loro minimo multiplo comune, è il prodotto stesso di questi numeri.

Esempio. Abbiansi i numeri 312 e 108; il cui massimo comun divisore è 12. Il minimo multiplo di questi due numeri è $\frac{312\times108}{12}$, o ciò ch'è lo stes-o $\frac{312}{12}\times108=26\times108=2808$. Gli altri multipli sono 2808×2, 2808×3, ...

Multipli comuni a più di due numeri.

147*. *Il minimo multiplo comune a più numeri interi, è lo stesso di quello del minimo multiplo di due tra essi e dei numeri dati rimanenti.*

Abbiansi, per esempio, i quattro numeri A, B, C, D, e sia M il minimo multiplo comune ai due primi; dico che il minimo multiplo comune ai numeri M, C, D, è anche il minimo multiplo dei numeri proposti.

Infatti, qualunque multiplo comune ai numeri A, B, C, D, essendo un multiplo di A e di B, è anche un multiplo del loro minimo multiplo comune M; esso è dunque un multiplo comune dei numeri M, C, D. Reciprocamente, qualunque multiplo comune ai numeri M, C, D, essendo un multiplo di M, è un multiplo di A e di B che sono divisori di M; esso è dunque un multiplo comune ad A, B, C, D.

Quindi i numeri A, B, C, D, hanno gli stessi multipli comuni che i numeri M, C, D; dunque il minimo multiplo comune degli uni, è anche il minimo multiplo comune degli altri.

148*. In virtù di questo teorema la ricerca del minimo multiplo comune a più numeri interi, è ridotta a quella del minimo multiplo comune a due soli numeri.

E invero, ritenute le denominazioni precedenti, si è dimostrato che il minimo multiplo comune ai numeri interi

$$A, B, C, D.$$

è uguale a quello di

$$M, C, D.$$

Applicando il teorema precedente a questi ultimi tre numeri e chiamando M' il minimo multiplo comune a M e a C, si dimostrerebbe al modo stesso che il minimo multiplo comune a questi tre numeri, o ciò che è lo stesso, il minimo multiplo dei quattro numeri proposti è uguale a quello di

$$M', D.$$

Possiamo quindi enunciare la seguente regola:

Per trovare il minimo multiplo comune a più numeri, bisogna prima cercare il minimo multiplo comune a due fra essi; poi il minimo multiplo comune al numero così ottenuto e ad un terzo dei numeri proposti; e così di seguito sino a che siansi adoprati tutti i numeri. L' ultimo minimo multiplo comune ottenuto a questo modo, è quello dei numeri proposti.

OSSERVAZIONE I. *Tutti i multipli comuni a più numeri sono divisibili pel minimo tra essi.*

Riteniamo le medesime denominazioni di sopra. È chiaro che qualunque multiplo comune ai numeri A, B, C, D, è un multiplo comune ad M, C, D; per la stessa ragione è un multiplo comune ai numeri M' e D, e per conseguenza è divisibile pel minimo multiplo di questi due numeri.

OSSERVAZIONE II^a. *Il minimo multiplo comune a più numeri primi fra loro, è uguale al prodotto di questi stessi numeri.*

Applicazione della riduzione dei numeri in fattori primi alla ricerca del minimo multiplo comune.

149. Per trovare il minimo multiplo comune a più numeri, si può ancora *risolverli in fattori primi e formare il prodotto di tutti questi fattori prendendo ciascuno di essi col maggiore esponente col quale si trova nei numeri dati.*

Abbiansi, per esempio, i numeri

$$200 = 2^3 \times 5^2,\ 500 = 5^3 \times 2^2,\ 147 = 3 \times 7^2.$$

Il loro minimo multiplo è: $2^3 \times 5^3 \times 3 \times 7^2$.

Infatti, questo prodotto è evidentemente divisibile per ciascuno dei numeri dati; di più, qualunque numero divisibile per 200, 500 e 147, deve contenere il fattore 2^3 che si trova in 200; il fattore 5^3 che si trova in 500, e i fattori 3 e 7^2 che si trovano in 147. Quindi non può essere minore del prodotto di questi fattori che è, per conseguenza, il loro minimo multiplo comune.

Esercizi.

I. Se n indica un numero intero qualunque, il prodotto $n(n+1)(2n+1)$, è divisibile per 6.

II. a e b indicando due numeri interi, il prodotto $ab(a^2+b^2)(a^2-b^2)$ è divisibile per 30.

III. Se i divisori di un numero si dispongono per ordine di grandezza, cominciando dall'unità, che è il minimo di questi divisori, e terminando col numero stesso, che è il maggiore, il prodotto di due divisori presi in questa serie a egual distanza dagli estremi, è costante ed eguale al numero stesso.

IV. Il quadrato di un numero primo diminuito di un'unità è sempre divisibile per 12 (2 e 3 fanno eccezione).

V. Per trovare il massimo comun divisore di tre nu-

meri, A, B e C, si può procedere nella maniera seguente: formare i C primi multipli di A e di B:

$$A,\ 2A,\ 3A,\ \ldots\ldots\ CA,$$
$$B,\ 2B,\ 3B,\ \ldots\ldots\ CB,$$

e cercare quante volte i due numeri corrispondenti in queste due linee, sono simultaneamente divisibili per C. Questo numero di volte è il massimo comun divisore domandato.

VI. Per trovare il massimo comun divisore tra un numero A, e il prodotto di molti altri $M\times N\times P$, possiamo cercare il massimo comun divisore D di A e di M, dividere A per D, e cercare il massimo comun divisore D' del quoziente Q e di N; dividere Q per D', e cercare il massimo comun divisore D'' del quoziente Q' e di P; il massimo comun divisore di A e di $M\times N\times P$ sarà $D\times D'\times D''$.

VII. Se a e b indicano due numeri interi primi fra loro, a^2-ab+b^2 e $a+b$ non possono avere altri fattori primi comuni che 3.

VIII. Se sulla circonferenza di un circolo si segna un numero m di punti, che si uniscono di n in n, 1°. Si finirà sempre per tornare al punto di partenza; 2°. Se m e n sono primi fra loro, non ci si tornerà che dopo avere incontrato tutti gli altri punti di divisione; 3°. Se ciò non ha luogo, il numero dei punti *incontrati* sarà un divisore del numero m.

IX. Il prodotto di tutti i numeri interi consecutivi da 1 fino a $p-1$, è sempre divisibile per p, se p non è primo, e non lo è mai nel caso contrario.

X. Se due numeri a e b sono primi fra loro, il massimo comun divisore di $a+b$ e di $a-b$ è al più eguale a 2.

XI. In quante maniere un numero può risolversi in un prodotto di due fattori primi fra loro? Provare che questo numero di maniere è $2^{n-1}-1$, n essendo il numero dei fattori primi distinti che dividono il numero proposto.

XII. Il prodotto di n numeri interi consecutivi, è sempre divisibile pel prodotto degli n primi numeri: $1\times2\times3\times4\ldots n$.

XIII. Il prodotto $2\times6\times10\times14\ldots\ldots\times18\times4n-6$, è divisibile, qualunque sia n, per $2\times3\times4\times5\times6\times\ldots\ldots n$.

XIV. a e b essendo due numeri primi, vi sono $(a-1)(b-1)$ numeri primi ad $a\times b$, e minori di $a\times b$.

XV. Se a, b, c, d, indicano quattro numeri primi con un quinto p, e che $a\times b-a'\times b'$ e $a-a'$ sieno divisibili per p, anche $b-b'$ sarà divisibile per p.

XVI. Il minimo multiplo comune a tre numeri è uguale al loro prodotto moltiplicato pel massimo comun divisore, e diviso pel prodotto dei loro massimi comuni divisori due a due.

XVII. Il minimo multiplo di quattro numeri è uguale al loro prodotto moltiplicato pel prodotto dei loro massimi comun divisori tre a tre, e diviso pel prodotto dei loro massimi comuni divisori due a due.

CAPITOLO VIII.

TEORIA DELLE FRAZIONI.

—

Definizione delle frazioni.

150. Dividendo una grandezza in parti eguali, la riunione di un certo numero di queste parti si chiama una *frazione* di questa grandezza. Una frazione dipende dal numero delle parti nelle quali la grandezza è stata divisa, che si chiama il suo *denominatore*, e dal numero di quelle che sono state riunite, che chiamasi suo *numeratore*. Il numeratore e il denominatore di una frazione sono talvolta chiamati i suoi due termini.

Per scrivere una frazione, si scrive il numeratore al di sopra del suo denominatore, e si separano con una linea orizzontale; per enunciarlo, si legge prima il numeratore, e si aggiunge il nome del denominatore seguito dalla terminazione *esimo*.

Esempio. Se l' unità si divide in quattordici parti eguali, la riunione di dieci di queste parti si rappresenta con $\frac{10}{14}$, che si pronuncia *dieci quattordicesimi*.

Vi ha eccezione pei denominatori 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10; pei quali si dice mezzo, terzo, quarto, quinto, sesto, settimo, ottavo, nono, decimo.

Quando una grandezza è una frazione dell' unità, questa frazione è il numero che le serve di misura. Questo numero è astratto quando non s' indica la specie dell' unità. Quando si opera sopra numeri astratti, bisogna intendere che l' unità alla quale si riferiscono non

è stata fissata, ma potrà esserlo ulteriormente in un modo qualunque.

151. Osservazione I. La definizione delle frazioni non suppone il denominatore maggiore del numeratore. Per esempio, $\frac{11}{3}$ è una frazione che esprime undici volte il terzo dell' unità.

Osservazione II. I numeri interi si possono considerare come frazioni aventi per denominatore l'unità; per esempio, 3 è uguale a $\frac{3}{1}$.

Qualunque numero intero si può considerare anche come una frazione avente per denominatore un numero dato. Abbiasi per esempio 2, che vogliamo trasformare in una frazione avente per denominatore 7; siccome l'unità è uguale a 7 settimi, 2 unità sono eguali a 2×7 settimi, cioè a $\frac{2\times7}{7}$ o $\frac{14}{7}$. Quindi possiamo dire che:

Per trasformare un intero in una frazione che abbia per denominatore un numero dato, basta moltiplicare l'intero per questo numero, e dare al prodotto questo stesso numero per denominatore.

Teoremi relativi alle frazioni.

152. Teorema I. *Una frazione è uguale al quoziente della divisione del suo numeratore pel suo denominatore.*

Per esempio, $\frac{15}{7}$ è il settimo di 15: infatti, il settimo di 15 contiene il settimo di ciascuna delle quindici unità che compongono 15, cioè a dire 15 volte $\frac{1}{7}$ o $\frac{15}{7}$.

Questo teorema si può provare ancora nel modo seguente: si ha (39)

$$15\times7=7\times15,$$

cioè a dire che 15 *unità* ripetute 7 volte danno lo stesso prodotto di 7 *unità* ripetute 15 volte. Se dunque si prende

per unità $\frac{1}{7}$ (e ciò può farsi, poichè l'unità è una quantità completamente arbitraria), si vede che 15 *settimi* ripetuti 7 volte danno lo stesso prodotto che 7 settimi o 1, ripetuto 15 volte, cioè che 15 settimi ripetuti 7 volte danno per prodotto 15, e che, per conseguenza, 15 settimi sono il settimo di 15.

153. Il teorema precedente può enunciarsi in un altro modo. *Moltiplicando una frazione pel suo denominatore, si ottiene per prodotto il numeratore.*

Infatti, dire che $\frac{15}{7}$ è il settimo di 15, vale lo stesso che dire che $\frac{15}{7}$ ripetuto sette volte, dà per prodotto 15.

154. Osservazione. Dal teorema precedente si deduce in generale che, *il quoziente di una divisione è uguale al quoziente intero, aumentato di una frazione avente per numeratore il resto e per denominatore il divisore.*

Sia, per esempio, da dividere 43 per 9, il quoziente intero è 4 il resto 7, cioè a dire che il nono di 43 si compone di 4 unità, più il nono di 7; esso è dunque $4+\frac{7}{9}$.

Da ciò si deduce che quando una frazione è maggiore dell' unità, si può ridurla a un numero intero aumentato da una frazione minore dell' unità.

Esempio. $\frac{73}{5}$ è uguale a $14+\frac{3}{5}$.

155. Teorema II. *Se il numeratore di una frazione si moltiplica o si divide per un numero intero, la frazione è moltiplicata o divisa per questo numero.*

Infatti, il denominatore restando lo stesso, le parti dell' unità che compongono la frazione, conservano lo stesso valore; se dunque se ne prendono due, tre, quattro, ... volte più, o due, tre, quattro, ... volte meno, il risultato sarà due, tre, quattro, ... volte maggiore, o due, tre, quattro, ... volte minore.

Esempio. $\frac{15}{7}$ è il triplo di $\frac{5}{7}$, $\frac{5}{7}$ è il terzo di $\frac{15}{7}$.

156. Teorema III. *Se il denominatore di una frazione si moltiplica o si divide per un numero intero, la frazione è divisa o moltiplicata per questo numero.*

1°. Sia, per esempio, la frazione $\frac{5}{9}$: bisogna provare che moltiplicando il denominatore per 4 si ottiene una frazione, $\frac{5}{36}$, che è il quarto della prima.

Infatti, se dopo aver diviso l' unità in 9 noni, si divide ciascuno di essi in quattro parti eguali, si otterranno in tutto 36 parti eguali, che saranno, per conseguenza, dei trentaseiesimi. Dunque $\frac{1}{36}$ è il quarto di un nono, e per conseguenza, cinque trentaseiesimi, sono il quarto di cinque noni.

2°. Consideriamo la frazione $\frac{7}{12}$: bisogna provare che dividendo il denominatore per 4, si ottiene una frazione $\frac{7}{3}$, che è il quadruplo della prima; infatti, la dimostrazione precedente prova che $\frac{7}{12}$ è il quarto di $\frac{7}{3}$, dunque $\frac{7}{3}$ è il quadruplo di $\frac{7}{12}$.

157. Osservazione. Per moltiplicare una frazione per un numero intero, si può (155) moltiplicare il suo numeratore o (156) dividere il suo denominatore per questo numero intero. Il primo modo è sempre applicabile; ma il secondo esige che il denominatore sia divisibile pel moltiplicatore considerato.

Per dividere una frazione per un numero intero, si può (155) moltiplicare il suo denominatore o (156) dividere il suo numeratore per questo numero intero. Il primo modo è sempre applicabile; ma il secondo richiede che il numeratore sia divisibile pel divisore considerato.

158. Teorema IV. *Il valore di una frazione non varia moltiplicando o dividendo i suoi due termini per uno stesso numero.*

Abbiasi la frazione $\frac{9}{15}$; dividendo il suo numeratore per 3 si ottiene $\frac{3}{15}$, che è (155) il terzo di $\frac{9}{15}$; se poi si di-

vide il denominatore per 3, il risultato $\frac{3}{5}$ è (156) il triplo di $\frac{3}{15}$, e per conseguenza eguale a $\frac{9}{15}$.

Si proverebbe al modo stesso che non si altera il valore di una frazione moltiplicando i suoi due termini per uno stesso numero.

Riduzione di una frazione alla sua più semplice espressione.

159. Una frazione si può (158) rendere più semplice dividendo i suoi due termini per uno stesso numero. Se questo numero è il loro massimo comun divisore, i due termini diventando primi tra loro, non potranno più diminuirsi con lo stesso metodo. Il teorema seguente prova di più che è impossibile, in qualunque modo, di dare alla frazione una forma più semplice.

160. Teorema V. *Una frazione i cui termini sono primi tra loro è irriducibile, cioè a dire che è impossibile esprimerla con termini minori.*

Sia, per esempio, la frazione $\frac{19}{28}$ i cui termini sono primi tra loro, e supponiamo che sia eguale ad un'altra frazione $\frac{a}{b}$, in guisa che si abbia:

$$\frac{a}{b}=\frac{19}{28}.$$

Moltiplicando per b i due membri di quest'eguaglianza, i prodotti saranno eguali: ma $\frac{a}{b}$ moltiplicato per b dà (153) per prodotto a; $\frac{19}{28}$ moltiplicato per b dà per prodotto $\frac{19\times b}{28}$; avremo dunque:

$$a=\frac{19\times b}{28}.$$

In questa eguaglianza a è intero, dunque 28 divide esattamente il prodotto $19\times b$; ma è primo con 19;

dunque (123) divide b, e si ha, indicando con q un quoziente intero, $b=28\times 9$. Il valore di a diventa allora:

$$a=\frac{19\times 28\times q}{28}=19\times q.$$

Dunque a e b sono maggiori di 19 e 28, ed eguali ai loro prodotti per uno stesso numero intero q.

161. Osservazione. Da ciò che precede risulta che per formare tutte le frazioni eguali ad una data frazione, basta rendere questa frazione irriducibile, e poi moltiplicare i suoi due termini per la serie dei numeri interi, 2, 3, 4, ...

Esempio. Per formare tutte le frazioni eguali a $\frac{25}{170}$, si divideranno i due termini di questa frazione pel loro massimo comun divisore 5, e diverrà $\frac{5}{34}$; $\frac{5}{34}$ essendo irriducibile, le sole frazioni che le sieno eguali sono $\frac{10}{68}$, $\frac{15}{102}$, $\frac{20}{136}$, ec.

Riduzione di due o più frazioni allo stesso denominatore.

162. *Ridurre due o più frazioni allo stesso denominatore, significa trovare altre frazioni, rispettivamente eguali alle prime, e che abbiano uno stesso denominatore.* Questa riduzione può sempre effettuarsi.

Consideriamo prima due frazioni, $\frac{5}{8}$ e $\frac{3}{11}$. Per ridurle al medesimo denominatore, è evidente che basta moltiplicare i due termini di ciascuna di esse pel denominatore dell'altra; infatti le due frazioni

$$\frac{5\times 11}{8\times 11}=\frac{55}{88} \quad \text{e} \quad \frac{3\times 8}{11\times 8}=\frac{24}{88},$$

formate a questo modo, sono eguali rispettivamente alle date, e hanno lo stesso denominatore 88.

Se le frazioni sono più di due, si moltiplicheranno

i due termini di ciascuna di esse pel prodotto dei denominatori di tutte le altre, ed allora il denominatore comune sarà uguale al prodotto dei denominatori dati.

Esempio. Siano le frazioni $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{6}$; operando come si è detto, le nuove frazioni saranno

$$\frac{5\times8\times4\times6}{7\times8\times4\times6},\ \frac{3\times7\times4\times6}{8\times7\times4\times6},\ \frac{3\times7\times8\times6}{4\times7\times8\times5},\ \frac{7\times8\times4}{6\times7\times8\times4};$$

ovvero, effettuando le moltiplicazioni

$$\frac{960}{1344},\ \frac{504}{1344},\ \frac{1068}{1344},\ \frac{226}{1344}.$$

163'. Osservazione. Quando si vogliono paragonare due frazioni fra di loro è necessario ridurle prima allo stesso denominatore. Così, per esempio, se si volesse sapere quale delle frazioni $\frac{9}{11}$ e $\frac{12}{17}$ è la maggiore, bisognerebbe ridurle prima allo stesso denominatore, e le frazioni $\frac{153}{187}$, $\frac{132}{187}$ che ne risultano, mostrano chiaramente che la prima è maggiore della seconda.

Riduzione delle frazioni al minimo denominatore comune.

164. Supponiamo le frazioni date, ridotte alla loro più semplice espressione, cioè a dire ridotte a frazioni irriducibili; ciascuna di esse non può essere eguale (160) che a frazioni i cui termini siano multipli dei suoi. Un denominatore comune deve dunque essere ad una volta multiplo di tutti i denominatori così ridotti, e il più piccolo valore che possa avere, è il loro minimo multiplo comune. Per dare alle frazioni questo denominatore comune, bisognerà moltiplicare i due termini di ciascuna di esse pel quoziente della divisione del minimo multiplo pel suo denominatore.

Esempio. Riprendiamo le frazioni $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{6}$, che sono irriducibili. Il minimo multiplo dei loro denominatori è 168. Perchè le frazioni acquistino questo denominatore, si moltiplicheranno i due termini della prima per $\frac{168}{7}$ o 24, quelli della seconda per $\frac{168}{8}$ o 21; quelli della terza per $\frac{168}{4}$ o 42, e quelli della quarta per $\frac{168}{6}$ o 28; allora diventano

$$\frac{120}{168},\quad \frac{63}{168},\quad \frac{126}{168},\quad \frac{28}{168}.$$

Addizione e sottrazione delle frazioni.

165. *Quando più frazioni hanno lo stesso denominatore, si addizionano o si sottraggono sommando o sottraendo i loro numeratori, e dando al risultato il denominatore comune.*

È evidente, per esempio, che aggiungendo due settimi, tre settimi e quattro settimi, si ottiene un numero di settimi eguale a $2+3+4$, cioè a dire 9 settimi, si ha dunque $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}+\frac{4}{7}=\frac{9}{7}$.

La differenza tra $\frac{12}{13}$ e $\frac{4}{13}$ è evidentemente anche un numero di tredicesimi eguale a $12-4$, o $\frac{8}{13}$.

166. Quali che siano le frazioni da sommare o da sottrarre, si ridurranno allo stesso denominatore, e si opererà poi secondo la regola precedente.

Siano, per esempio, le frazioni $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$: riducendole allo stesso denominatore, diventano $\frac{8}{12}$ e $\frac{9}{12}$; la loro somma è dunque $\frac{17}{12}$ e la loro differenza $\frac{1}{12}$.

Osservazione. Quando voglionsi sommare o sottrarre dei numeri di cui alcuni sono interi, si possono considerare questi ultimi come frazioni aventi per denominatore l'unità, e la regola precedente non riceve alcuna modificazione.

ESEMPIO*. Debbansi sommare i numeri $12+\frac{5}{6}$, $3+\frac{2}{5}$, $7+\frac{4}{9}$. Si ha $12+\frac{5}{6}=\frac{12}{1}+\frac{5}{6}=\frac{72}{6}+\frac{5}{6}=\frac{77}{6}$; $3+\frac{2}{5}=\frac{3}{1}+\frac{2}{5}=\frac{15}{5}+\frac{2}{5}=\frac{17}{5}$; $7+\frac{4}{9}=\frac{7}{1}+\frac{4}{9}=\frac{63}{9}+\frac{4}{9}=\frac{67}{9}$. Quindi la somma dei tre numeri dati si riduce a quella delle frazioni $\frac{77}{6}$, $\frac{17}{5}$, $\frac{67}{9}$.

Si può anche procedere in un altro modo, sommando gl' interi fra loro e le frazioni fra loro; la somma è quindi

$$22+\frac{5}{6}+\frac{2}{5}+\frac{4}{9}=22+\frac{151}{90}=23+\frac{61}{90}.$$

Moltiplicazione delle frazioni.

167. Quando si prende una certa frazione di una grandezza, si dice che si moltiplica per questa frazione. La grandezza moltiplicata si chiama *moltiplicando,* e il risultato il suo *prodotto* per la frazione che fa da *moltiplicatore*. Così, moltiplicare una grandezza per $\frac{2}{3}$, significa prenderne i due terzi. In aritmetica la grandezza da moltiplicare è rappresentata da un numero, e si cerca il numero che esprime il prodotto.

Per moltiplicare due frazioni, bisogna dividere il prodotto dei numeratori per quello dei denominatori. Debbasi moltiplicare $\frac{2}{7}$ per $\frac{3}{11}$, cioè a dire, debbansi prendere i $\frac{3}{11}$ di $\frac{2}{7}$: per quest' oggetto, si prenderà l' undecimo di $\frac{2}{7}$ e si ripeterà tre volte; ora l' undecimo di $\frac{2}{7}$ è (156) $\frac{2}{7\times11}$, e il triplo di $\frac{2}{7\times11}$ è (155) $\frac{2\times3}{7\times11}$, tal è dunque il valore del prodotto.

Questa regola può dimostrarsi ancora nel seguente modo. Moltiplicando la frazione $\frac{2}{7}$ per 3, il prodotto $\frac{2\times3}{7}$ che ne risulta, è 11 volte più grande del prodotto che si cerca, giacchè il moltiplicando 3 è 11 volte più

grande di $\frac{3}{11}$; quindi per ottenere il prodotto richiesto bisogna dividere $\frac{2\times3}{7}$ per 11, ciò che dà $\frac{2\times3}{7\times11}$.

Osservazione I. I numeri interi essendo frazioni il cui denominatore è l'unità, la regola generale si applica al caso in cui il moltiplicando è intero.

Esempio.

$$7\times\frac{3}{4}=\frac{21}{4}.$$

Osservazione II. La moltiplicazione delle frazioni unite agli interi non offre alcuna difficoltà, avvertendo di ridurre ad una sola frazione qualunque fattore composto di un intero e di una frazione. Ma questa moltiplicazione può effettuarsi ancora in un altro modo.

Debbasi moltiplicare $3+\frac{5}{7}$ per $4+\frac{3}{11}$. Si ha

$$\left(3+\frac{5}{7}\right)\times\left(4+\frac{3}{11}\right)=3\times4+3\times\frac{3}{11}+\frac{5}{7}\times4+\frac{5}{7}\times\frac{3}{11}$$
$$=12+\frac{9}{11}+\frac{20}{7}+\frac{15}{77}=12+\frac{63+220+15}{77}$$
$$=12+\frac{298}{77}=15+\frac{67}{77}.$$

Osservazione III. Il prodotto di due frazioni non cambia invertendo i fattori, giacchè, per la regola precedente, ciò torna lo stesso che mutare l'ordine dei fattori che formano il suo numeratore e il suo denominatore.

Così, per esempio,

$$\frac{3}{11}\times\frac{2}{7}=\frac{3\times2}{11\times7}, \quad e \quad \frac{2}{7}\times\frac{3}{11}=\frac{2\times3}{7\times11},$$

ma $3\times2=2\times3$, e $11\times7=7\times11$, dunque si ha

$$\frac{3}{11}\times\frac{2}{7}=\frac{2}{7}\times\frac{3}{11}.$$

168. Il prodotto di molte frazioni si definisce come quello di molti numeri interi; è il risultato ottenuto moltiplicando le due prime frazioni, poi il loro prodotto per la terza, poi il nuovo prodotto per la quarta, ec. Un simile prodotto è, per la regola precedente, eguale al prodotto di tutti i numeratori diviso per quello di tutti i denominatori. Quale che sia l'ordine dei fattori, il suo numeratore e il suo denominatore saranno sempre composti dei medesimi fattori interi, per conseguenza *il prodotto di molte frazioni non cambia invertendo i fattori.*

Procedendo in un modo affatto analogo a quello tenuto pei numeri interi (**40**, **41**), si potranno dal precedente teorema dedurre i seguenti:

Per moltiplicare un numero pel prodotto di molti fattori, si può moltiplicarlo successivamente per questi diversi fattori.

Per moltiplicare un prodotto per un altro prodotto, basta formare un prodotto unico coi fattori del moltiplicando e con quelli del moltiplicatore.

In un prodotto di più fattori si può sostituire ad un numero qualunque di fattori il loro prodotto effettuato.

Divisione delle frazioni.

169. Dividere una grandezza per una frazione significa formare una seconda grandezza che moltiplicata per questa frazione riproduca la prima. La grandezza divisa si chiama dividendo, la frazione per la quale si divide dicesi divisore, e il risultato dell'operazione si chiama quoziente. In aritmetica la grandezza da dividere è rappresentata da un numero, e si cerca il numero che rappresenta il quoziente.

Per dividere una grandezza per una frazione, basta moltiplicarla per la frazione divisore rovesciata.

Debbasi, per esempio, dividere per $\frac{4}{7}$ una grandezza che chiamo *A*. Si tratta di trovare un numero il cui prodotto per $\frac{4}{7}$ sia eguale ad *A;* in guisa che i $\frac{4}{7}$ del quoziente equivalgono ad *A;* dunque $\frac{1}{7}$ del quoziente è il quarto di *A*, e per conseguenza sette settimi del quoziente o il quoziente stesso è i sette quarti di *A*, o il prodotto di *A* per la frazione $\frac{7}{4}$; ciò che bisognava dimostrare.

Da ciò si deduce che per dividere un *numero* intero o frazionario per una frazione, basta moltiplicarlo per la frazione rovesciata.

Esempio. $\frac{5}{7}$ divisa per $\frac{3}{11}$ da per quoziente $\frac{5}{7}\times\frac{11}{3}=\frac{55}{21}$.

Questa regola può dimostrarsi ancora nel seguente modo. Debbasi dividere $\frac{3}{5}$ per $\frac{4}{7}$. Dividendo $\frac{3}{5}$ per 4, il quoziente $\frac{3}{5\times4}$ è 7 volte più piccolo del quoziente che si cerca, perchè 4 è 7 volte più grande del divisore vero; quindi per ottenere il quoziente richiesto, basta moltiplicare $\frac{3}{5\times4}$ per 7, ciò che dà $\frac{3\times7}{5\times4}$.

Si può anche trar profitto dal principio già dimostrato (67) che il quoziente non muta moltiplicando il dividendo e il divisore per uno stesso numero. Infatti, moltiplicando $\frac{3}{5}$ e $\frac{4}{7}$ per $\frac{7}{4}$, si ha $\frac{3\times7}{5\times4}$ e $\frac{4\times7}{7\times4}$ ossia 1; ora un numero qualunque diviso per l'unità dà per quoziente il numero stesso, dunque ec.....

170. Osservazione. Le parole moltiplicazione e divisione applicate alle frazioni, sono evidentemente sviate dal loro senso etimologico, nel quale, moltiplicare, significa prendere più volte, e dividere, ridurre in più parti. Per mostrare che, malgrado ciò, queste operazioni sono affatto analoghe a quelle che si riferiscono ai numeri interi, basterà esaminare il significato delle definizioni date (167, 169), nel caso di un moltiplicatore

o di un divisore intero, posto sotto forma di frazione, $\frac{6}{2}$ per esempio.

Moltiplicare una grandezza per $\frac{6}{2}$ (167), significa prenderne 6 volte la metà, cioè a dire il triplo.

Dividere una grandezza per $\frac{6}{2}$ (169), significa trovare una seconda grandezza di cui la prima sia i $\frac{6}{2}$, cioè a dire la tripla; questa seconda grandezza è evidentemente il terzo della prima.

La coincidenza delle due definizioni nei due casi è evidente.

Applicazioni della teoria delle frazioni.

171. 1°. *Un palo verticale è diviso in quattro parti. La prima è $\frac{1}{3}$, la seconda $\frac{1}{4}$ e la terza i $\frac{2}{7}$ della sua altezza totale; la quarta è $\frac{5}{11}$ di metro. Qual' è l' altezza del palo?*

Le tre prime parti riunite formano $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{2}{7}$ o $\frac{73}{84}$ dell' altezza totale; quindi la quarta n' è gli $\frac{11}{84}$. Ma questa parte è $\frac{5}{11}$ di metro, quindi gli $\frac{11}{84}$ del palo equivalgono a $\frac{5}{11}$ di metro, cioè a dire che l' altezza del palo moltiplicata per $\frac{11}{84}$ dà per prodotto $\frac{5}{11}$ di metro. Dunque quest' altezza è il quoziente della divisione di $\frac{5}{11}$ di metro per $\frac{11}{84}$, ed è espressa da

$$\frac{5^m}{11}\times\frac{84}{11}=3^m+\frac{57}{121}.$$

2°. *Una palla elastica rimbalza ad un' altezza eguale ai $\frac{2}{3}$ di quella dalla quale è caduta; dopo aver rimbalzato tre volte, si eleva ad un' altezza di $\frac{13}{16}$ di metro; da quale altezza è caduta la prima volta?*

Poichè la palla è rimbalzata tre volte, l' altezza alla quale si eleva è uguale a quella da cui è caduta la prima volta moltiplicata tre volte pel fattore $\frac{2}{3}$, cioè a dire

per $\frac{2}{9} \times \frac{2}{9} \times \frac{2}{9} = \frac{8}{729}$. Gli $\frac{8}{729}$ dell' altezza che si cerca sono dunque $\frac{13}{16}$ di metro, e quest' altezza è per conseguenza uguale al quoziente della divisione di $\frac{13}{16}^m$ per $\frac{8}{729}$ o $\frac{13 \times 729}{8 \times 16} = \frac{9477}{128} = 74^m + \frac{5}{128}$.

3°. *Una fontana riempie una vasca in $\frac{7}{5}$ di ora, un' altra la riempie in $\frac{7}{3}$ di ora. In quanto tempo la riempiranno tutte e due versando contemporaneamente?*

Poichè la prima fontana riempie la vasca in $\frac{7}{5}$ di ora, in $\frac{1}{5}$ di ora ne riempirà $\frac{1}{7}$; dunque in un' ora riempirà $\frac{5}{7}$ della vasca.

Un ragionamento analogo proverebbe che la seconda fontana può riempire in un' ora i $\frac{3}{7}$ della vasca.

Da ciò segue che le due fontane versando contemporaneamente per un'ora riempiono $\frac{8}{7}$ della vasca; dunque $\frac{1}{7}$ della vasca sarà riempita in $\frac{1}{8}$ di ora, e quindi tutta la vasca sarà riempita in $\frac{7}{8}$ di ora.

Le soluzioni precedenti richieggono, per esser bene intese, che si abbia un' idea chiara di ciò che significa moltiplicare o dividere una grandezza per una frazione, ma è questa la sola difficoltà che offrono.

Generalizzazione della teoria delle frazioni.

172. Il quoziente della divisione di due numeri interi si può porre sotto forma di frazione, scrivendoli l' uno al disotto dell' altro e separandoli mediante una linea orizzontale. Questa notazione si applica sovente a numeri non interi; per esempio, per indicare il quoziente della divisione di $\frac{5}{7}$ per $\frac{3}{4}$, si scrive $\frac{\left(\frac{5}{7}\right)}{\left(\frac{3}{4}\right)}$, e si dà, per analogia, il nome di frazioni a simili espressioni.

È importante mostrare che tutte le regole relative al calcolo delle frazioni, vi si applicano senza eccezione.

E questo sarà da noi fatto nei seguenti teoremi, ove, per brevità, abbiamo indicati con le lettere a e b i numeratori e i denominatori frazionari di queste espressioni.

Teorema VI. *I due termini di una espressione della forma* $(\frac{a}{b})$, *si possono moltiplicare per uno stesso numero intero o frazionario.*

Sia m un numero qualunque; bisogna provare che:

$$\frac{a}{b}=\frac{a\times m}{b\times m}.$$

Indichiamo con q il valore del quoziente $\frac{a}{b}$. La quantità q sarà sempre eguale ad una frazione a termini interi, quantunque a e b sieno frazionari, giacchè il quoziente della divisione di due frazioni è una frazione.

Per definizione si avrà:

$$a=q\times b.$$

Moltiplicando i due membri di questa eguaglianza pel numero m, si avrà:

$$a\times m=q\times b\times m=q\times(b\times m).$$

Questa nuova eguaglianza esprime che q è il quoziente della divisione di $a\times m$ per $b\times m$; si ha dunque

$$q=\frac{a\times m}{b\times m};$$

ciò che bisognava dimostrare.

Osservazione. Dal teorema precedente segue che più espressioni della forma $\frac{a}{b}$ si potranno ridurre allo stesso denominatore, in un modo affatto analogo a quello usato per le frazioni a termini interi. Quindi l'addizione e la sottrazione di quest' espressioni non offre alcuna difficoltà.

173. **Teorema VII.** *Il prodotto di due espressioni*

della forma $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ *è uguale al prodotto dei numeratori diviso per quello dei denominatori.*

Chiamiamo q e q' le frazioni a termini interi che sono eguali ad $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$; si avrà

$$\frac{a}{b}=q,\ \frac{c}{d}=q';$$

e per definizione,

$$a=q\times b,\ c=q'\times d.$$

Il prodotto dei primi membri dev' essere eguale a quello dei secondi, si avrà dunque

$$a\times c=(q\times b)\times(q'\times d)=q\times q'\times(b\times d).$$

Quest'eguaglianza esprime che il prodotto $q\times q'$ è uguale al quoziente della divisione di $a\times c$ per $b\times d$, cioè a dire che

$$q\times q'=\frac{a\times c}{b\times d}.$$

Ciò che bisognava dimostrare.

174. Teorema VIII. *Per dividere una grandezza per un' espressione della forma* $\frac{a}{b}$, *basta moltiplicarla per l' espressione rovesciata* $\frac{b}{a}$.

Sia A una grandezza da dividere per $\frac{a}{b}$; bisogna trovare una seconda grandezza Q, che moltiplicata per $\frac{a}{b}$, ripròduca A. Si deve dunque avere

$$A=Q\times\frac{a}{b};$$

ovvero, moltiplicando i due membri di questa eguaglianza per l' espressione $\frac{b}{a}$;

$$A\times\frac{b}{a}=Q\times\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=Q\times\left(\frac{a\times b}{b\times a}\right)=Q;$$

ciò che bisognava dimostrare.

Esercizi.

I. La popolazione dell' Asia è, secondo l' opinione di uno statista, $\frac{18}{7}$ di quella dell' Europa; la popolazione dell' Affrica è $\frac{8}{11}$; e la popolazione di America $\frac{13}{77}$. Supponendo che la popolazione d' America sia di 390257000 abitanti, calcolare quella delle altre parti del mondo.

II. Il mare ricopre $\frac{11}{14}$ della superficie del globo. La superficie dell' Asia è $\frac{121}{27}$ di quella dell' Europa, quella dell' Affrica $\frac{22}{7}$, quella dell' America $\frac{111}{29}$ e quella dell' Oceania $\frac{81}{27}$. Supponendo che la superficie dell' Affrica sia di 2970000000 d' ettari, calcolare quella delle altre parti del mondo, e dedurne la superficie totale del globo.

III. Se si aggiunge un medesimo numero ai due termini di una frazione, il risultato sarà compreso tra l' unità e la frazione stessa, per modo che la frazione aumenterà se è minore di 1, e diminuirà nel caso inverso.

IV. La somma dei numeratori di più frazioni, divisa per quella dei loro denominatori, è compresa fra la maggiore e la minore di queste frazioni.

V. Due frazioni irriducibili non possono avere per somma un numero intero, se non quando hanno lo stesso denominatore.

VI. La somma di tre frazioni irriducibili, non può essere un numero intero, se uno dei tre denominatori contiene un fattore primo che non divide nessuno degli altri due.

VII. Se si dispongono per ordine di grandezza tutte le frazioni irriducibili minori dell' unità, di cui il denominatore è inferiore a un numero dato, le frazioni a egual distanza dalle estremità, avranno lo stesso denominatore e la loro somma sarà l' unità.

VIII. Se si considerano le frazioni $\frac{1}{2}, \frac{1}{2\times3}, \frac{1}{3\times4}, \frac{1}{4\times5}, \frac{1}{5\times6}, \frac{1}{6\times7}$, ec., provare che la somma delle n pri-

me è minore dell' unità e ne differisce di una quantità eguale a $\frac{1}{n\times 1}$.

IX. Se si considerano le frazioni $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, ec., potremo prenderne un numero abbastanza grande perchè la loro somma superi un numero qualunque grande quanto si vuole.

X. Verificare che, qualunque sia il numero intero n, si ha

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{5\times 7}+\frac{1}{7\times 9}+\dots\frac{1}{(2n+1)\times(2n+3)}=\frac{n+1}{2n+3}.$$

XI. Se A e B sono due numeri interi qualunque che si dividono l'uno per l'altro, P essendo il quoziente e R il resto, si avrà

$$\frac{B}{A}=P+\frac{R}{A}.$$

Facciamo ancora

$$\frac{B}{R}=P_1+\frac{R_1}{R},$$
$$\frac{B}{R^1}=P_2+\frac{R_2}{R_1},$$

e così di seguito fino a che si trovi una divisione che riesca; provare che si ha

$$\frac{A}{B}=\frac{1}{P}-\frac{1}{PP_1}+\frac{1}{PP_1P_2}-\frac{1}{PP_1P_2P_3}+\text{ec.}$$

XII. Se $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{d}{a}$, indicano frazioni, non irriducibili, dello stesso denominatore, e che b, c, d, abbiano per massimo comun divisore l'unità, per ottenere altre frazioni eguali a quelle e del medesimo denominatore, bisogna moltiplicare i due termini di ciascuna di esse per uno stesso numero.

XIII. Il lastricato di Parigi occupa uno spazio di 311 ettari $\frac{3}{7}$; supponendo un lastricato uniforme e tale che 12 pietre occupino $\frac{2}{3}$ di metro quadrato, quale sarebbe il numero

delle pietre e il loro prezzo totale, supponendo che per 20 franchi se ne possano mettere 52?

XIV. Il consumo annuo è, per le strade maestre, di 225 decimetri cubi per chilometro e per mille chilogrammi di circolazione. Quale dev' essere la circolazione giornaliera media affinchè s' impieghino annualmente 700 metri cubi di pietrame per il mantenimento di una strada la cui lunghezza è $\frac{5}{4}$ di chilometro? Si ammetterà che il metro cubo di pietrame non contiene, a causa dei vuoti, che $\frac{6}{11}$ di metro cubo di pietra.

XV. Il metro cubo di carbone in pezzi non rappresenta che $\frac{6}{11}$ di metro cubo di carbone in roccia; il carbone in pezzi pesando 81 chilogrammi l' ettolitro (decimo di metro cubo) qual' è il volume di un pezzo di carbone che pesa 655 chil. $\frac{3}{4}$?

XVI. La strada ferrata del Nord ha consumato, nel 1850, 42341050 chilogrammi di coke. Qual' era il volume occupato nella mina dal carbone che ha prodotto questo coke, ammettendo che il peso del coke è i $\frac{2}{3}$ del peso del carbone che serve a fabbricarlo? (Si farà uso dei dati della questione precedente).

XVII. Se s' indica, in generale, con Ea la parte intera di un numero a, avremo, qualunque sia il numero indicato da x,

$$Ex+E\left(x+\frac{1}{n}\right)+E\left(x+\frac{2}{n}\right)+\dots E\left(x+\frac{n-1}{n}\right)=Enx,$$

n indicando un numero intero qualunque.

CAPITOLO IX.

TEORIA GENERALE DEI DIVISORI E DEI MULTIPLI COMUNI.

—

Definizioni.

175. Una grandezza è detta *multipla* di un' altra quando la contiene un numero intero di volte. La seconda è allora un *divisore* della prima.

Da questa definizione risulta che una grandezza ha per multipli: se stessa, il suo doppio, il suo triplo, il suo quadruplo....., e per divisori: sè stessa, la sua metà, il suo terzo, il suo quarto, ec.

Esempio. Cinque minuti ha per multipli: dieci minuti, quindici minuti, venti minuti ec., e per divisori: cinque minuti, due minuti e mezzo, un minuto e due terzi, ec.

Un numero è il multiplo di un altro quando lo contiene un numero intero di volte; è il suo divisore, se vi è contenuto, al contrario, un numero intero di volte.

Esempio. I multipli di $\frac{5}{7}$ sono: $\frac{5}{7}$, $\frac{10}{7}$, $\frac{15}{7}$, $\frac{20}{7}$, ec. E i suoi divisori: $\frac{5}{7}$, $\frac{5}{14}$, $\frac{5}{21}$, $\frac{5}{28}$, $\frac{5}{35}$, ec.....

Osservazione. I numeri primi non hanno (114) altri divisori interi che sè stessi e l' unità, ma hanno un' infinità di divisori frazionari; per esempio i divisori di 7 sono 7, $\frac{7}{2}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{7}{7}$ o 1, ec.

Resto della divisione di due numeri.

76. Il resto di una divisione è l' eccesso del dividendo sul massimo multiplo del divisore che esso con-

tiene, cioè a dire sul prodotto del divisore per la parte intera del quoziente.

Esempio. $\frac{9}{2}$ diviso per $\frac{2}{7}$, dà per quoziente $\frac{63}{4}$ o $15\frac{3}{4}$, dunque il resto di questa divisione è $\frac{9}{2}-\frac{2}{7}\times 15$ e poichè $\frac{9}{2}$ è uguale a $\frac{2}{7}\times 15+\frac{2}{7}\times\frac{3}{4}$, questa differenza è uguale a $\frac{2}{7}\times\frac{3}{4}$ o $\frac{3}{14}$. In generale, *il resto di una divisione è il prodotto del divisore per l' eccesso del quoziente esatto sulla sua parte intera.*

Teoremi relativi alla divisibilità dei numeri qualunque.

177. Teorema I. *Qualunque numero che divide esattamente tutte le parti di una somma, divide anche questa somma.*

La somma è infatti composta di parti eguali ciascuna a un numero intero di volte il divisore, quindi essa conterrà questo divisore un numero intero di volte, giacchè la somma di molti numeri interi è un numero intero.

Esempio. $\frac{2}{19}$ divide $\frac{4}{19}$, $\frac{30}{57}$, $\frac{36}{38}$, dividerà anche la loro somma. Infatti si ha

$$\frac{4}{19}+\frac{30}{57}+\frac{36}{38}=\frac{2}{19}\times 2+\frac{2}{19}\times 5+\frac{2}{19}\times 9$$
$$=\frac{2}{19}\times(2+5+9)=\frac{2}{19}\times 16.$$

178. Teorema II. *Qualunque numero che divide un altro, ne divide i multipli.*

Giacchè i multipli di un numero potendo ottenersi aggiungendolo a sè stesso un certo numero di volte, è chiaro che i suoi divisori dividono tutte le parti di una somma così formata, e per conseguenza (177) la somma medesima.

179. Teorema III. *Qualunque numero che divide esattamente due altri, divide la loro differenza.*

I due termini di questa differenza contenendo, infatti, un numero intero di volte il divisore, sarà lo stesso per la differenza, poichè la differenza di due numeri interi è un numero intero.

180. Teorema IV. *Qualunque numero che divide una somma e una delle sue parti, divide l' altra parte.*

Questo teorema non differisce dal precedente che per la forma dell' enunciato, poichè la seconda parte può essere considerata come la differenza tra tutta la somma e l' altra parte.

Teoria generale dei divisori comuni.

181. Un numero che divide esattamente due altri si chiama il loro divisore comune.

Esempio. $\frac{5}{8}$ è un divisore comune di $\frac{5}{4}$ e $\frac{15}{8}$, giacchè è contenuto due volte nel primo, e tre volte nel secondo.

Quando una grandezza è contenuta un numero esatto di volte in due altre, si dice ch'è il loro *divisore comune* o la loro *comune misura.* La seconda locuzione è quasi esclusivamente adottata.

Talvolta è utile conoscere i divisori comuni a due numeri, e particolarmente il maggiore di essi che chiamasi il loro massimo comun divisore.

Nel Capitolo VII abbiamo esposto quanto si riferisce alla ricerca dei divisori comuni a due o più numeri interi; ora ci proponiamo di rendere più generale questa teoria applicandola al caso di numeri e divisori qualunque.

Osservazione. I resultati relativi ai numeri astratti si applicheranno, come sempre, alle grandezze che rappresentano. Così, dicendo: Il massimo comun divisore di **10** e **15** è **5**, si esprime ad una volta che: la più grande comune misura di **10** *metri* e **15** *metri,* è **5** *metri;* la più

grande comune misura di 10 *terzi di metro* e 15 *terzi di metro*, è 5 *terzi di metro*, ec.....

182. Teorema V. *Se due numeri sono divisibili l'uno per l' altro, il minore di essi è il loro massimo comun divisore.*

Abbiansi i numeri $\frac{6}{7}$ e $\frac{3}{35}$, che sono divisibili l' uno per l' altro, poichè il primo è uguale a 10 volte il secondo. Uno dei loro divisori comuni è $\frac{3}{35}$; gli altri dovendo dividere $\frac{3}{35}$, sono tutti inferiori a questo numero; dunque $\frac{3}{35}$ è il massimo comun divisore.

183. Teorema VI. *Due numeri hanno lo stesso massimo comun divisore del minore di essi e del resto della loro divisione.*

Abbiansi i numeri $\frac{73}{8}$ e $\frac{2}{3}$, il quoziente esatto della loro divisione è $\frac{219}{16}$ o $13+\frac{11}{16}$; il resto è dunque (176) $\frac{11}{16}\times\frac{2}{3}$ o $\frac{11}{24}$, e si ha

$$\frac{73}{8}=\frac{2}{3}\times 13+\frac{11}{24}.$$

Da quest' eguaglianza risulta:

1°. Che tutti i divisori comuni a $\frac{73}{8}$ e $\frac{2}{3}$ dividono $\frac{11}{24}$.

Infatti questi numeri dividendo $\frac{2}{3}$ dividono il suo multiplo $\frac{2}{3}\times 13$; cioè dividono una somma $\frac{73}{8}$ e una delle sue parti $\frac{2}{3}\times 13$, quindi dividono (180) anche l' altra parte che è $\frac{11}{24}$.

2°. Tutti i divisori comuni a $\frac{2}{3}$ e $\frac{11}{24}$ dividono $\frac{73}{8}$.

Giacchè questi numeri dividendo $\frac{2}{3}$ dividono il suo multiplo $\frac{2}{3}\times 13$, cioè dividono le due parti di una somma $13\times\frac{2}{3}$ e $\frac{11}{24}$, quindi (177) dividono anche la somma medesima o $\frac{73}{8}$.

Dunque:

Tutti i divisori comuni a $\frac{73}{8}$ e $\frac{2}{3}$ dividono $\frac{11}{24}$, e per conseguenza, $\frac{11}{24}$ e $\frac{2}{3}$.

Tutti i divisori comuni a $\frac{11}{24}$ e $\frac{3}{8}$ dividono $\frac{73}{8}$, e per conseguenza, $\frac{73}{8}$ e $\frac{3}{8}$.

Queste due proposizioni riunite dimostrano che i divisori comuni a $\frac{11}{24}$ e $\frac{3}{8}$ o a $\frac{73}{8}$ e $\frac{3}{8}$ sono affatto identici, e che per conseguenza il massimo degli uni, è lo stesso del massimo degli altri. Ciò che bisognava dimostrare.

Ricerca del massimo comun divisore di due numeri interi o frazionari.

184. Il teorema precedente permette di sostituire ai due numeri di cui cercasi il massimo comune divisore altri più piccoli. Questi ultimi potranno venir sostituiti da altri ancora più piccoli; e così di seguito, sino a che si pervenga a due numeri divisibili l'uno per l'altro; il minore dei due sarà allora (182) il loro massimo comun divisore.

Si ha quindi la regola seguente:

Per cercare il massimo comun divisore di due numeri interi o frazionari, si divide il maggiore pel minore, poi il minore pel resto di questa divisione, e si continua così a dividere ciascun divisore pel resto corrispondente sino a che una di queste divisioni si faccia esattamente; l'ultimo dei divisori adoperati è il massimo comun divisore cercato.

Perchè questa regola conduca al risultato, fa d'uopo che il resto di una delle divisioni divida esattamente il divisore. Per mostrare che ciò accade sempre, quali che sieno le frazioni sulle quali si opera, stabiliremo alcuni teoremi preliminari.

185. Teorema VII. *Due frazioni hanno sempre un massimo comun divisore.*

Abbiansi le frazioni $\frac{2}{15}$ e $\frac{8}{21}$, che si possono ridurre allo stesso denominatore e porre sotto la forma $\frac{42}{315}$ e $\frac{120}{315}$;

dunque $\frac{1}{315}$ è un divisore comune, poichè è contenuto 42 volte in una e 120 nell'altra. L'esistenza di un divisore comune prova evidentemente quella di un massimo comun divisore.

186. Teorema VIII. *Operando conformemente alla regola data* (184) *per la ricerca del massimo comun divisore, si trova una serie di resti di cui ciascuno è minore della metà di quello che lo precede di due posti.*

Indichiamo, infatti, con R un resto di posto qualunque, e con R_1 il resto seguente. Se, in conformità della regola generale, si divide R per R_1, si avrà un quoziente intero e un resto R_2; vogliamo provare che R_2 è minore della metà di R.

Se R_1 è minore della metà di R, R_2 l'è a più forte ragione, giacchè i resti vanno diminuendo; basta dunque trattare il caso in cui R_1 è maggiore della metà di R. In questo caso, R non contenendo che una volta R_1, il resto R_2 della loro divisione è la differenza $R-R_1$; ora l'eccesso di R sopra un numero R_1 maggiore della sua metà è evidentemente minore di questa metà.

Osservazione. La dimostrazione precedente prova pure che il secondo resto è minore della metà del minore dei numeri dati.

187. Teorema IX. *La regola* (184) *per la ricerca del massimo comun divisore di due frazioni condurrà sempre, dopo un certo numero di operazioni, a due resti divisibili l'uno per l'altro, e darà, per conseguenza, sempre il massimo comun divisore.*

Siano A e B le due frazioni sulle quali si opera; il secondo resto (186) è minore di $\frac{B}{2}$, il quarto minore di $\frac{B}{4}$, il sesto minore di $\frac{B}{8}$, ec. Se dunque l'operazione non avesse fine, i resti decrescerebbero illimitatamente,

ciò ch'è impossibile, giacchè dovendo essere tutti divisibili (183) pel massimo comun divisore delle due frazioni *A*, *B*, dovranno essere maggiori di esso; bisogna dunque necessariamente che l'operazione abbia un termine.

188. Teorema X. *Il massimo comun divisore di due numeri interi è un numero intero.*

Il metodo generale (184) si applica alla ricerca del massimo comun divisore di due numeri qualunque interi o frazionari. Nel caso di due numeri interi questo metodo non differisce da quello che è stato esposto (Cap. VI); per conseguenza, il massimo comun divisore di due numeri interi, trovato col metodo del Capitolo VI, è il massimo di tutti i divisori interi o frazionari, e come è evidentemente intero, la proposizione è dimostrata.

189. Teorema XI. *Qualunque numero che ne divide due altri divide il loro massimo comun divisore.*

Questo teorema non differisce dal precedente che per la forma dell'enunciato. Infatti, quando si dice che il massimo comun divisore di due numeri interi è un numero intero, ciò significa che tra due numeri interi di volte un' unità, il massimo comun divisore è un numero intero di volte questa unità. Ma, come l'abbiamo osservato più volte, la parola unità rappresenta una grandezza affatto arbitraria; si può dunque dire: il massimo comun divisore tra due numeri interi di volte una grandezza, è un numero intero di volte questa grandezza, o ancora: se una grandezza ne divide due altre, divide il loro massimo comun divisore, ciò che diventa identico al teorema enunciato, quando alle grandezze si sostituiscono i numeri che le rappresentano.

190. Osservazione. La reciprocanza del teorema precedente è evidente: *qualunque numero che divide il massimo comune divisore di due altri, divide anche questi*

due; giacchè i due numeri sono multipli del loro massimo comun divisore, e qualunque numero che ne divide un' altro, divide (178) i suoi multipli. Dunque: qualunque numero che ne divide due altri A, B, divide il loro massimo comun divisore D, e qualunque numero che divide D divide A e B.

Da queste due proposizioni riunite risulta, *che i divisori comuni a due numeri sono gli stessi di quelli del loro massimo comun divisore.*

191. Teorema XII. *Moltiplicando due numeri per un terzo, il massimo comun divisore è moltiplicato per questo terzo numero.*

Supponiamo, per esempio, che siasi trovato $\frac{3}{7}$ pel massimo comun divisore di $\frac{6}{7}$ e $\frac{9}{7}$, ciò significa che $\frac{3}{7}$ di *unità* sono il massimo comun divisore tra $\frac{6}{7}$ di unità e $\frac{9}{7}$ di unità; l' unità rappresentando una grandezza affatto arbitraria, si può dire che tra i $\frac{6}{7}$ e i $\frac{9}{7}$ di una stessa grandezza il massimo comun divisore è i $\frac{3}{7}$ di questa grandezza; supponendo per conseguenza che questa grandezza sia rappresentata da un numero intero o frazionario m, il massimo comun divisore tra $m \times \frac{6}{7}$ e $m \times \frac{9}{7}$ è uguale ad $m \times \frac{3}{7}$. Ciò che bisognava dimostrare.

192. Osservazione. La ricerca del massimo comun divisore di più numeri, si effettuerà in un modo affatto identico a quello impiegato pei numeri interi (101).

Altra maniera di cercare il massimo comun divisore di due o più frazioni.

193. *Per cercare il massimo comun divisore di due o più frazioni, si può ridurle allo stesso denominatore, cercare poi il massimo comun divisore dei loro numeratori, e dividerlo pel denominatore comune.*

Per dimostrare questa regola, supponiamo che le

frazioni ridotte allo stesso denominatore siano $\frac{6}{14}$ e $\frac{9}{14}$; il massimo comun divisore tra 6 unità e 9 unità, è 3 unità. Ora, la parola unità rappresentando una grandezza qualunque, si può dire che il massimo comun divisore tra sei volte una grandezza e nove volte la stessa grandezza, è tre volte questa grandezza. Supponendo che questa grandezza sia espressa da $\frac{1}{14}$, se ne deduce che il massimo comun divisore di $\frac{6}{14}$ e $\frac{9}{14}$ è $\frac{3}{14}$.

194. Osservazione. Le proposizioni precedenti comprendono implicitamente il teorema relativo alle frazioni irriducibili già dimostrato (160).

Una frazione i cui termini sono primi tra loro è irriducibile, e i termini delle frazioni eguali ad essa sono multipli dei suoi.

Abbiasi infatti la frazione $\frac{5}{7}$. Il massimo comun divisore di 5 e di 7 è l'unità, per conseguenza il massimo comun divisore di cinque *settimi* e di sette *settimi* o uno, è (193) un *settimo*, e gli altri divisori comuni a $\frac{5}{7}$ e all'unità saranno (189) i divisori di $\frac{1}{7}$, dunque $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{14}$, $\frac{1}{21}$, $\frac{1}{28}$ ec.... sono i soli divisori dell'unità contenuti esattamente in $\frac{5}{7}$, e, per conseguenza, i soli denominatori possibili delle frazioni eguali a $\frac{5}{7}$, sono: 14, 21, 28, ec....

Minimo multiplo comune di due numeri.

195. La ricerca dei multipli comuni si collega assai semplicemente a quella dei divisori comuni. Abbiansi, infatti, due numeri A e B. I loro multipli comuni sono i multipli di A, divisibili per B, cioè a dire, indicando con m un numero intero qualunque, i numeri della forma mA che sono divisibili per B. Ma se mA è divisibile per B, la m^{esima} parte di mA o A, è divisibile per la m^{esima} parte di B o $\frac{B}{m}$, e per conseguenza $\frac{B}{m}$ è un divisore

di A; ma è anche un divisore di B, giacchè vi è contenuto m volte, esso è dunque un divisore comune ad A e B.

Reciprocamente, i divisori comuni ad A e B sono i divisori di B, che dividono pure A; cioè a dire, indicando con m un numero intero, sono i numeri della forma $\frac{B}{m}$ che dividono A. Ma se $\frac{B}{m}$ divide A, m volte $\frac{B}{m}$ o B, divide m volte A o mA, mA è dunque un multiplo di B, e poichè è pure un multiplo di A, è un multiplo comune ad A e B.

Si può dunque enunciare il teorema seguente:

Essendo A *e* B *due numeri qualunque, se* $\frac{A}{m}$ *è un divisore comune a questi due numeri*, $B \times m$ è *un multiplo comune, e reciprocamente, se* $B \times m$ *è un multiplo comune*, $\frac{A}{m}$ *è un divisore comune.*

I divisori e i multipli comuni si corrispondono dunque due a due, e si vede che il prodotto di ciascun divisore pel multiplo corrispondente $\left(\frac{A}{m} \times B \times m\right)$ è costante ed uguale ad $A \times B$. Uno di essi è per conseguenza tanto più piccolo quanto maggiore è l'altro, e il minimo multiplo comune corrisponde al massimo comun divisore, in guisa che *il minimo multiplo comune di due numeri è uguale al loro prodotto diviso pel loro massimo comun divisore.*

196. Osservazione. Se $\frac{A}{m}$ è il massimo comun divisore di due numeri A e B, gli altri divisori comuni sono (189) i divisori di $\frac{A}{m}$, cioè a dire $\frac{A}{2m}, \frac{A}{3m}, \frac{A}{4m}$, ec., quindi, se mB il minimo multiplo comune, gli altri saranno $2mB$, $3mB$, $4mB$, ec.

Possiamo quindi enunciare il teorema seguente.

I multipli comuni a due numeri, sono i multipli del loro minimo multiplo comune.

Da questo teorema si dedurrebbe, per la ricerca del minimo multiplo comune a più numeri, una regola simile a quella che è stata data pel caso di più numeri interi. Ma vi ha un' altra regola che conduce più rapidamente al risultato.

Altro modo per ottenere il minimo multiplo comune a due o più frazioni.

197. *Per trovare il minimo multiplo comune a due o più frazioni, si può ridurle allo stesso denominatore, cercare poi il minimo multiplo comune ai loro numeratori e dividerlo pel denominatore comune.*

Supponiamo che le frazioni ridotte allo stesso denominatore siano

$$\frac{8}{36},\ \frac{20}{36},\ \frac{15}{36};$$

il minimo multiplo comune dei numeratori è 120; ciò significa che il minimo multiplo comune a 8 *unità*, 20 *unità* e 15 *unità* è 120 *unità*. Ora, la parola unità può rappresentare una grandezza qualunque, in guisa che il minimo multiplo comune a 8 volte, 20 volte e 15 volte una stessa grandezza, è 120 volte questa grandezza. Supponendo che la grandezza sia espressa da $\frac{1}{36}$, si vede che il minimo multiplo tra $\frac{8}{36}$, $\frac{20}{36}$ e $\frac{15}{36}$ è $\frac{120}{36}$

Esercizi.

I. I lati di un rettangolo sono $81^m\frac{2}{3}$ e $46^m\frac{1}{3}$, si domanda qual distanza si può dare a colonne equidistanti i cui centri debbono essere disposti sul contorno di questo rettangolo, in

modo che quattro di esse occupino i quattro vertici; la distanza di due centri dovendo essere compresa tra 3^m e 6^m.

II. L'ago dei minuti, quello delle ore e quello dei secondi trovandosi contemporaneamente sulla cifra 12 del quadrante, dopo quanto tempo questi tre aghi saranno di nuovo riuniti? Per risolvere questo problema, si cercherà prima in quali momenti si effettuano gl'incontri dell'ago dei minuti con quello dei secondi, e per trovare le coincidenze di quest'incontri, bisognerà cercare i multipli comuni a due frazioni.

III. Qual è il massimo multiplo comune, minore di 100000, delle frazioni $\frac{28}{57}$, $\frac{4}{21}$ e $\frac{48}{19}$?

CAPITOLO X.

TEORIA DELLE FRAZIONI DECIMALI.

—

Definizioni.

198. La semplicità dei calcoli relativi ai numeri interi risulta dalla legge di decrescimento che seguono le unità rappresentate dalle loro differenti cifre. Ma nulla obbliga ad arrestarsi in questa legge alla cifra delle unità semplici; e si possono mettere alla sua destra nuove cifre, delle quali la prima esprimerà decimi, la seconda centesimi, la terza millesimi ec., in guisa che ciascuna unità sia dieci volte minore della precedente. I numeri scritti a questo modo si chiamano numeri decimali o frazioni decimali; e nello scriverli fa d'uopo aver cura di porre una virgola dopo la cifra delle unità semplici, per indicare ove cominciano quelle che esprimono frazioni di unità.

Esempio. 375,483 significa 375 unità, 4 decimi, 8 centesimi, 3 millesimi.

Maniera di enunciare un numero decimale.

199. In conseguenza dell'adottata legge di decrescimento, le unità espresse da una cifra di posto qualunque, possono facilmente trasformarsi in unità degli ordini seguenti. Per esempio, nel numero 375,483, la cifra 4 esprime 4 decimi, 40 centesimi, 400 millesimi;

la cifra 8 esprime 8 centesimi o 80 millesimi, e finalmente 3 esprime 3 millesimi. Questo numero si può dunque enunciare nel modo seguente: 375 unità, 483 millesimi. Le 375 unità rappresentando 375000 millesimi, si può anche leggere: 375483 millesimi.

Ordinariamente per enunciare un numero decimale, si enuncia la sua parte intera, poi si convertono le tre prime cifre decimali in millesimi; le tre seguenti in milionesimi ec.

Esempio. 1783, 213517823 si legge: 1783 unità, 213 millesimi, 517 milionesimi, 823 bilionesimi.

Quando il numero delle cifre decimali non è un multiplo di tre, si termina enunciando le unità decimali rappresentate dall' ultima cifra o dall' insieme delle due ultime cifre.

Esempio. 37, 51421783 si legge: 37 unità, 514 millesimi, 217 milionesimi, 83 centomilionesimi.

200. Osservazione I. L' ordine delle unità espresse da una cifra dipendendo solamente dal suo posto a partire dalla virgola, si possono scrivere degli zeri alla destra di un numero decimale senza alterarne il valore. Così potremo rendere divisible per 3 il numero delle sue cifre decimali, e decomporlo, in tutti i casi, in unità, millesimi, milionesimi ec.

201. Osservazione II. Per rendere un numero decimale, dieci, cento, mille .... volte maggiore o minore, basta spostare la virgola di uno, due, tre posti verso la destra o verso la sinistra, giacchè ciascuna cifra esprimerà così un valore, dieci, cento, mille volte più grande o più piccolo. Se il numero delle cifre non permettesse questo trasporto della virgola, si renderebbe possibile scrivendo degli zeri allà destra delle cifre decimali o alla sinistra della parte intera.

Esempio. Debbasi dividere 75,342 per 1000000.

trasportiamo la virgola di sei posti verso la sinistra, dopo averlo scritto nel modo seguente:

0000075,342,

si otterrà così

0,000075342.

Per moltiplicare lo stesso numero per un milione, si avanzerà la virgola di sei posti verso la destra dopo averlo scritto nel modo seguente:

75,342000,

si otterrà così

75342000.

202. TEOREMA. *Un' unità decimale di un certo ordine è sempre maggiore della somma dei numeri espressi dalle cifre che la seguono.*

Se, per esempio, si scrive

0,3478.....

qualunque sia il numero delle cifre che seguono 8, il loro insieme non esprimerà un diecimilesimo. E invero, supponiamo, per avere la maggior somma possibile, che tutte queste cifre siano 9. Il primo esprimerà 9 centomilesimi, cioè a dire i $\frac{9}{10}$ solamente di un diecimilesimo, e per conseguenza, questa cifra differisce da un diecimilesimo per un decimo di diecimilesimi, cioè per un centomilesimo; il secondo esprimerà 9 milionesimi cioè i $\frac{9}{10}$ solamente di un centomilesimo, per conseguenza questa cifra unita alla precedente differisce da un diecimilesimo per un decimo di centomilesimo, ovvero per un milionesimo. Al modo stesso si vedrà che la cifra seguente rappresenta $\frac{9}{10}$ di milionesimi, e in generale,

ciascuna cifra non esprime che i nove decimi di ciò che bisognerebbe per completare un diecimilesimo, e, per conseguenza, questa somma non sarà mai completata.

L'osservazione precedente è importante: da essa si deduce che un numero non può esprimersi in due modi differenti in frazioni decimali. Se, infatti, due cifre decimali sono differenti, la loro differenza esprimerà almeno un' unità decimale dell' ordine corrispondente, e non potrà essere compensata da una differenza in senso inverso tra le cifre seguenti.

Trasformazione di un numero decimale in frazione ordinaria.

203. Abbiasi, per esempio, il numero decimale **75,32178**, la cui ultima cifra esprime centomillesimi; si è veduto (199) che questo numero si può leggere: **7532178** centomillesimi; esso è dunque eguale a

$$\frac{7532178}{100000}.$$

In generale, *per trasformare un numero decimale in frazione ordinaria, bisogna sopprimere la virgola e dividere il risultato per l' unità seguita da tanti zeri quante cifre decimali contiene il numero proposto.*

Esempio. $7,454$ è uguale a $\frac{7454}{1000}$.

Reciprocamente, per scrivere sotto forma di numero decimale una frazione che ha per denominatore l' unità seguita da un certo numero di zeri, *basta scrivere il numeratore e separare con una virgola tante cifre decimali quanti zeri vi sono nel denominatore.* Se il numeratore non avesse abbastanza cifre, si scrivereb-

bero alla sua sinistra più zeri i quali, senza cambiarne il valore, renderebbero possibile l'operazione.

Esempio. $\frac{7}{1000}$ è uguale a 0,007.

Da ciò che precede risulta che una frazione decimale può definirsi una frazione che ha per denominatore una potenza di 10.

Addizione e sottrazione dei numeri decimali.

204. Per effettuare l'addizione o la sottrazione di due numeri decimali, si procura di dar loro un egual numero di cifre dopo la virgola, scrivendo, se è necessario, uno o più zeri alla destra di uno di essi. Poi si pongono l'uno al disotto dell'altro, in modo che le virgole si corrispondano in colonna. Ciò fatto si opera come se i numeri fossero interi, senza che vi sia alcuna differenza, sia per la pratica, sia per la teoria dell'operazione, avvertendo solamente di porre nel risultato una virgola nel posto indicato dalle virgole dei numeri dati. Si può solamente osservare che nell'addizione gli zeri posti alla destra di uno dei numeri decimali non influiscono sui risultati, e si può quindi fare a meno di scriverli; questi zeri sono egualmente inutili nella sottrazione, ogniqualvolta bisogna aggiungerli al minore dei due.

Esempio I. Siano da sommare i tre numeri

2,783, 5,42, 0,7842.

L'operazione si dispone nel modo seguente:

$$\begin{array}{l} 2{,}783 \\ 5{,}42 \\ 0{,}7842 \\ \hline 8{,}9872 \end{array}$$

La somma cercata è 8,9872.

Esempio II. Debbasi sottrarre 12,738 da 15,3 L' operazione si dispone nel modo seguente:

$$\begin{array}{r} 15,300 \\ 12,738 \\ \hline 2,562 \end{array}$$

La differenza cercata è 2,562.

Complemento aritmetico.

205'. Si chiama *complemento aritmetico di un numero* il resto della sottrazione di questo numero dall' unità seguita da uno o più zeri; si dice complemento al 10 quando il numero dato si sottrae da 10; complemento al 100 quando si sottrae da 100, ec. Così per esempio, il complemento al 100 di 42,735 è 57,265, il complemento al 1000 è 957,265, ec. L' uso del complemento aritmetico riduce qualunque sottrazione ad un' addizione ed adduce molta brevità nelle operazioni ove si cerca il risultamento di più addizioni e sottrazioni successive. Debbasi, infatti, sottrarre 42,735 da 78,651. Si ha

$$78,651-42,735=78,651+100-42,735-100$$
$$=78,651+57,265-100=135,916-100=35,916.$$

Dunque possiamo dire che *per sottrarre due numeri l' uno dall' altro basta aggiungere al diminuendo il complemento aritmetico del diminutore, purchè si sopprima dal risultato l' unità sulla quale si è preso il complemento.*

Se ora si dovesse calcolare l' espressione

$$35,423-112,592+59,21-2,38+89,3-24,7,$$

bisognerebbe, procedendo nel modo ordinario, eseguire due addizioni e tre sottrazioni; ma facendo uso del complemento aritmetico l'operazione si riduce ad una sola addizione. Infatti, per ciò che abbiamo detto innanzi, si potrà eseguire l'addizione di sei numeri, cioè di 35,423, di 59,21, di 89,3, del complemento di 112,592, del complemento di 2,38 e del complemento di 24,7 presi tutti e tre sopra 1000, purchè dal risultato si tolgano 3 migliaia. L'operazione si dispone nel modo seguente:

```
   35,432
  887,408
   59,21
  997,62
   89,3
  975,3
 --------
 3044,261
```

Il risultato è dunque 44,261.

Moltiplicazione dei numeri decimali.

206. ***Per moltiplicare due numeri decimali l'uno per l'altro, si effettua il prodotto astrazion fatta dalle virgole, e si separano alla destra del risultato tante cifre decimali quante ne contengono i due numeri riuniti.***

I due numeri decimali si possono, infatti, considerare come due frazioni aventi per denominatore delle potenze di dieci (203); e quindi si può applicare loro la regola di moltiplicazione delle frazioni. Il prodotto dei numeratori è il prodotto dei numeri interi ottenuti sopprimendo le virgole. Per dividerlo pel prodotto dei denominatori, basta (201) separare alla sua destra tante cifre quanti zeri sono nei due denominatori, cioè a dire

tanti quante cifre decimali contengono il moltiplicando e il moltiplicatore riuniti, ciò che è precisamente la regola enunciata.

Esempio. Per moltiplicare 37,245 per 0,05, si moltiplicherà 37245 per 5, e si separeranno cinque cifre decimali alla destra del resultato (*a*).

Divisione dei numeri decimali.

207. Nella divisione dei numeri decimali distingueremo due casi.

1°. *Il divisore è intero.* La divisione si effettua precisamente come quella dei numeri interi.

Debbasi dividere 78,314 per 57. Il dividendo è composto di 78314 *millesimi;* dunque bisogna dividere il numero intero 78314 per 57, il risultato rappresenterà millesimi. Effettuando questa divisione si trova 1373 per quoziente e 58 per resto; quindi il quoziente esatto della divisione di 78314 per 57 è eguale (154) a $1373+\frac{53}{57}$ e per conseguenza il quoziente della divisione proposta è 1373 millesimi più $\frac{53}{57}$ di millesimi, cioè a dire $1,373+\frac{53}{57000}$.

In generale, *per dividere un numero decimale per un numero intero, si effettua la divisione come se il dividendo fosse intero, e si separano alla destra del quoziente tante cifre decimali quante ne contiene il divi-*

(*a*) Nella seconda edizione dell'Aritmetica di Bertrand, si trova un cenno del metodo da seguire per abbreviare una moltiplicazione quando non vogliosi ottenere che cifre decimali di un dato ordine. Noi abbiamo soppresso questo cenno, perchè ci è sembrato che l'importanza del soggetto richiedeva un capitolo speciale sulle *Abbreviazioni numeriche;* la quale aggiunta si troverà al termine di questo libro. T.

dendo. Per avere il quoziente esatto, bisogna aggiungere al numero decimale così ottenuto, una frazione avente per numeratore il resto della divisione che si è effettuata, e per denominatore il divisore seguito da tanti zeri, quante cifre decimali contiene il dividendo.

La frazione che, secondo la regola precedente, completa il quoziente, potrà essere convertita in decimali mediante il metodo generale che sarà esposto più lungi.

208. 2°. *Il divisore è una frazione decimale.* Si moltiplicheranno il dividendo e il divisore per una tal potenza di 10 che il divisore divenga intero. Questa moltiplicazione non altera il valore del quoziente e riduce questo caso al precedente.

Esempio. Debbasi dividere 2,2357 per 0,059; moltiplicando il dividendo e il divisore per 1000, questi numeri diventano 2235,7 e 59, che bisognerà dividere l'uno per l'altro. Effettuata questa divisione, dividendo secondo la regola precedente si trova per quoziente esatto $37{,}8+\frac{55}{590}$.

Osservazione. In ciò che precede si è parlato solamente del calcolo *esatto dei numeri* decimali. In un gran numero di casi non si dividono che valori approssimati, e allora si possono rendere più semplici i calcoli mediante metodi che saranno da noi esposti in seguito.

Condizione alla quale deve soddisfare una frazione ordinaria perchè possa essere convertita in frazione decimale.

209*. Teorema. *Affinchè una frazione ordinaria irriducibile possa esprimersi esattamente sotto forma di frazione decimale, è necessario e sufficiente che il denominatore non contenga altri fattori primi che* 2 *e* 5.

1°. Questa condizione è necessaria. Infatti, indichia-

mo con $\frac{a}{b}$ una frazione irriducibile che supponiamo potersi convertire esattamente in frazione decimale. In questa ipotesi $\frac{a}{b}$ dovrà essere eguale ad una frazione decimale, la quale sappiamo (203) potersi sempre porre sotto forma di una frazione ordinaria che ha per denominatore una potenza di 10. Quindi potremo fare:

$$\frac{a}{b}=\frac{N}{10^m}.$$

Moltiplicando le due frazioni eguali per 10^m, si ha

$$\frac{a\times 10^m}{b}=N.$$

Da questa eguaglianza risulta che $\frac{a\times 10^m}{b}$ deve ridursi ad un numero intero; or perchè ciò possa avvenire è necessario che b divida il prodotto $a\times 10^m$, ma esso è primo con a, dunque (123) deve dividere l'altro fattore 10^m; ma 10^m ha per fattori primi 2 e 5 solamente, per conseguenza (137) b deve contenere questi fattori primi e non altri.

2°. Questa condizione è sufficiente. Sia $\frac{a}{b}$ una frazione irriducibile il cui denominatore b non contenga altri fattori primi che 2 e 5. Potremo fare $b=2^n\times 5^m$, n ed m essendo due esponenti qualunque, i quali possono essere eguali o disuguali. Se sono uguali, la proposizione non ha bisogno di dimostrazione, perchè allora $\frac{a}{b}$ sarà una frazione che ha per denominatore una potenza di 10; se sono disuguali, potremo supporre uno maggiore dell'altro, per esempio, m maggiore di n. Ciò posto, facciamo $m=n+r$, essendo r la differenza fra m ed n.

Moltiplichiamo i due termini della frazione data $\frac{a}{2^n \times 5^m}$ per 2^r; avremo

$$\frac{a}{b}=\frac{a\times 2^r}{2^n\times 5^m\times 2^r}=\frac{a\times 2^r}{2^{n+r}\times 5^m}=\frac{a\times 2^r}{2^m\times 5^m}=\frac{a\times 2^r}{10^m}.$$

La quale eguaglianza dimostra ciò che volevamo.

Esempio. $\frac{3}{40}=\frac{3}{2^3\times 5}$: moltiplicando i due termini di questa frazione per 5^2 o 25, essa diventa $\frac{75}{2^3\times 5^3}=\frac{75}{10^3}=$ 0,075.

$\frac{4}{125}=\frac{4}{5^3}$. Moltiplicando i due termini di questa frazione per 2^3 o 8, essa diventa $\frac{32}{5^3\times 2^3}=\frac{32}{10^3}=0{,}032$.

210. Osservazione I. *Quando una frazione ordinaria irriducibile può trasformarsi in un numero decimale, questo numero ha tante cifre decimali quante unità vi sono nell' esponente di quello dei fattori* 2 *e* 5 *che figura nel denominatore della frazione col maggiore esponente.*

Osservazione II. Qualunque frazione potendo rendersi irriducibile, il teorema precedente permette sempre di decidere, se una data frazione è eguale a un numero decimale. Ordinariamente questa trasformazione è impossibile; ma si può sempre valutare la frazione data in decimali con quell' approssimazione che si vuole; ed è per l' appunto in questa valutazione approssimata che consiste generalmente la *riduzione di una frazione ordinaria in decimali.* E per quest' oggetto è indispensabile entrare in talune considerazioni, che ci torneranno utili anche in seguito.

Valutazione approssimata delle grandezze e dei numeri.

211*. Valutare una grandezza a meno di una grandezza data, significa trovare il massimo multiplo della seconda che è contenuto nella prima. Per esempio: valutare una distanza a meno di una lega, significa trovare il maggior numero di leghe che essa contiene. In aritmetica non dobbiamo occuparci che dei numeri, pei quali del resto le definizioni sono affatto simili. Valutare un numero A a meno di un numero B, significa trovare il massimo multiplo di B che è contenuto in A. Così valutare un numero a meno di un' unità, significa trovare il maggior numero di unità contenute in questo numero. E in generale valutare un numero a meno di $\frac{1}{n}$ significa cercare il maggior numero di volte che questo numero contiene la n^{esima} parte dell' unità.

Quando si valuta un numero a meno di un altro numero dato, si ottengono in generale due limiti, uno approssimato per *difetto*, l' altro per *eccesso*, cioè uno minore l' altro maggiore del numero proposto. Per esempio se sappiamo che un peso è compreso fra 22 chilogrammi e 23 chilogrammi, tutti e due questi numeri saranno la misura del peso dato a meno di un' unità, il primo per difetto, il secondo per eccesso. E in generale, se sappiamo che un peso è maggiore di m volte la n^{esima} parte di un chilogrammo e minore di $m+1$ volte questa n^{esima} parte, le frazioni $\frac{m}{n}$ e $\frac{m+1}{n}$ esprimono la misura del peso dato a meno di $\frac{1}{n}$, la prima per difetto, la seconda per eccesso.

212*. *Per valutare una frazione a meno di un' unità,*

basta prendere l' intero contenuto in questa frazione o l' intero immediatamente superiore.

Abbiasi la frazione $\frac{478}{235}$. Effettuando la divisione del numeratore pel denominatore si trova

$$\frac{478}{235}=2+\frac{8}{235}.$$

La frazione $\frac{478}{235}$ è quindi compresa fra 2 e 3; dunque i numeri 2 e 3 sono i valori di $\frac{478}{235}$ a meno di un' unità, il primo per difetto, il secondo per eccesso.

213'. *Per valutare una frazione a meno di* $\frac{1}{n}$, *basta valutare a meno di un' unità il prodotto di questa frazione per* n, *e dividere poi per* n *uno dei due interi consecutivi ottenuti.*

Osserviamo in generale che l' errore che si commette valutando un numero A a meno di un numero B, è l' eccesso di A sul maggior multiplo di B che vi è contenuto, o, ciò ch' è lo stesso, è il resto della divisione di A per B. Dunque il valore approssimato è il prodotto di B per la parte intera del quoziente.

Ciò posto, per ottenere il valore della frazione $\frac{a}{b}$ a meno di $\frac{1}{n}$, bisognerà dividere $\frac{a}{b}$ per $\frac{1}{n}$ e trovare la parte intera del quoziente; cioè bisognerà trovare l' intero contenuto nella frazione $\frac{a\times n}{b}$. Così, per esempio, volendo valutare $\frac{175}{249}$ a meno di $\frac{1}{12}$, si dividerà la prima frazione per la seconda e si otterrà per quoziente $\frac{175\times 12}{249}=\frac{2100}{249}=8+\frac{108}{249}$, dunque il valore

approssimato a meno di $\frac{1}{12}$ è $\frac{8}{12}$, e l' errore che si commette in questa valutazione è $\frac{108}{249}$ di dodicesimi.

L'importanza del soggetto ci spinge a dare un' altra dimostrazione di questo teorema.

Indichiamo con x il maggior numero di n^{esimi} contenuti in $\frac{a}{b}$, in guisa che $\frac{a}{b}$ sia compresa fra $\frac{x}{n}$ e $\frac{x+1}{n}$; si tratta di determinare il numero x. Ora le relazioni di grandezza che passano fra le frazioni $\frac{x}{n}$, $\frac{a}{b}$ e $\frac{x+1}{n}$ non verranno alterate moltiplicandole tutte e tre per n; quindi la frazione $\frac{a\times n}{b}$ è compresa fra i due interi consecutivi x e $x+1$. Per conseguenza otterremo il numero ignoto x prendendo l' intero contenuto nella frazione $\frac{a\times n}{b}$.

Se la frazione $\frac{a}{b}$ può essere rappresentata esattamente con una frazione avente n per denominatore; potremo scrivere $\frac{a}{b}=\frac{x}{n}$, da cui, moltiplicando per n,

$$x=\frac{a\times n}{b}.$$

Dunque la frazione $\frac{a\times n}{b}$ si riduce a un numero intero che è il valore di x.

Se la frazione $\frac{a}{b}$ è irriducibile, ciò che può sempre supporsi, il caso che si considera, non può aver luogo che se n è un multiplo di b (160).

Riduzione delle frazioni ordinarie in decimali.

214*. Applicando la regola data nel numero precedente si vede che: *per valutare una frazione a meno di* $\frac{1}{10^n}$ *bisogna moltiplicare il suo numeratore per* 10^n, *ciò che si effettua scrivendo* n *zeri alla sua destra; poi cercare il quoziente intero della divisione del prodotto pel denominatore; e finalmente dividere questo quoziente per* 10^n, *ciò che può effettuarsi separando con una virgola* n *cifre alla sua destra.*

Abbiasi, per esempio, la frazione $\frac{116}{495}$ che si voglia valutare a meno di $\frac{1}{10^6} = 0{,}000001$. Secondo la regola bisognerebbe scrivere sei zeri alla destra del numeratore e dividere il risultato pel denominatore, ma è chiaro che sarà lo stesso scrivere gli zeri a misura che bisognano nei dividendi parziali rispettivi.

```
1160      | 495
 1700     |0,234343
  2150
   1700
    2150
     1700
```

Dunque 0,234343 è il valore di $\frac{116}{495}$ a meno di un milionesimo per difetto; 0,234344 sarebbe il valore approssimato per eccesso a meno di un milionesimo.

Osservo che il valore della frazione data a meno di un decimo è 0,2 con l'errore di $\frac{170}{495}$ di decimi; il valore a meno di un centesimo è 0,23 con l'errore di $\frac{215}{495}$

di centesimi; il valore a meno di un millesimo è 0,234 con l' errore di $\frac{170}{495}$ di millesimi ec. Siccome la frazione data non è esprimibile esattamente in decimali (209), l'operazione precedente si può continuare indefinitamente, e l'errore si potrà rendere piccolo quanto si vuole, senza che però si possa mai annullare. Ciò si esprime dicendo che $\frac{116}{495}$ è il *limite* verso il quale tende l'espressione 0,234343.... quando vi si considera un numero di cifre di più in più grande.

Questo metodo è evidentemente generale, e si può enunciare la regola seguente:

Per ridurre una frazione in decimali, si divide il numeratore per il denominatore e si pone una virgola alla destra del quoziente, il quale dovrà essere rimpiazzato da uno zero se il numeratore è minore del denominatore. Si scrive uno zero alla destra del resto ottenuto, e si divide il risultato pel denominatore; il quoziente è la prima cifra decimale. Si aggiunge uno zero alla destra del nuovo resto, e si divide il resultato pel denominatore; il quoziente è la seconda cifra decimale. Si continua così indefinitamente. Se una delle divisioni si fa esattamente, la frazione proposta può esprimersi sotto forma di numero decimale, altrimenti il metodo dà solamente valutazioni di più in più approssimate.

215. Il metodo precedente dimostra che *ridurre una frazione in decimali, significa valutarla successivamente a meno di un decimo, a meno di un centesimo, a meno di un millesimo...., e formare la tavola di questi valori di più in più approssimati.*

Frazioni decimali periodiche.

216. Si chiama *frazione decimale periodica* una frazione decimale le cui cifre si riproducono sempre le stesse e nel medesimo ordine. L'insieme delle cifre che si riproducono si chiama un *periodo*. La frazione è detta *periodica semplice*, quando il periodo comincia immediatamente dopo la virgola; è detta *periodica mista*, nel caso contrario; e allora le cifre che precedono il primo periodo costituiscono *la parte non periodica*.

Esempio. 0,345 345 345 345 ....,

è una frazione decimale periodica semplice il cui periodo è 345;

0,73 318 318 318 ....

è una frazione periodica mista il cui periodo è 318. La parte non periodica è 73.

217. Teorema. *Qualunque frazione ordinaria ridotta in decimali dà luogo a una frazione di un numero limitato di cifre o ad una frazione periodica.*

Abbiasi una frazione ordinaria $\frac{A}{B}$. Operando su questa frazione in conformità della regola generale, supponiamo che siasi trovato Q per parte intera del quoziente, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6, ... per le sue cifre decimali; in guisa che il quoziente sia $Q, Q_1 Q_2 Q_3 Q_4 Q_5 Q_6 \ldots$; e siano ancora R, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, ... i resti delle divisioni successive.

Se procedendo nel modo indicato uno dei resti R_1, R_2, R_3, ... è nullo, $\frac{A}{B}$ è esattamente riducibile in de-

cimali, altrimenti l'operazione continua indefinitamente. In questo caso, i resti R_1, R_2, R_3,.... essendo tutti minori di B, dopo un numero di divisioni eguale al più a $B-1$, si ricadrà sopra un resto già ottenuto, giacchè vi sono solamente $B-1$ numeri interi differenti, inferiori a B. La regolarità del processo che dà le diverse cifre mostra che a partire da questi resti eguali, i quozienti e i resti successivi saranno i medesimi e si presenteranno nello stesso ordine; la frazione decimale sarà dunque periodica. Se, per esempio, si avesse $R_1 = R_3$, se ne dedurrebbe $Q_2 = Q_4$, $R_2 = R_4$, $Q_3 = Q_5$, $R_3 = R_5$, ec., e, per conseguenza, la frazione prolungata all'infinito sarebbe;

$$Q, Q_1\, Q_2\, Q_3\, Q_2\, Q_3\, Q_2\, Q_3 \ldots.$$

Osservazione I. *Quando una frazione* $\frac{A}{B}$ *ridotta in decimali dà luogo ad una frazione periodica, il numero delle cifre del periodo è minore del denominatore* B.

Giacchè i resti essendo tutti minori di B, dopo aver calcolate B cifre si sarà ricaduti due volte sullo stesso resto, e per conseguenza il periodo sarà cominciato.

Quando avviene che la frazione data si trasforma in frazione periodica mista, allora per la stessa ragione si ha che *il numero delle cifre del periodo, aumentato del numero delle cifre della parte non periodica, dà una somma minore del denominatore della frazione ordinaria.*

218. Osservazione II. Allorchè il denominatore di una frazione è alquanto grande, e che il numeratore è l'unità, le operazioni si posso abbreviare mediante un processo di cui ci limiteremo a dare un esempio.

Sia da ridursi in decimali $\frac{1}{29}$: cominciando l'operazione secondo il metodo generale, si trova

$$\begin{array}{l|l} 1 & 29 \\ 100 & 0{,}03448 \\ \ \ 130 & \\ \ \ \ \ 140 & \\ \ \ \ \ \ \ 240 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ 8 & \end{array}$$

E per conseguenza

[1] $\frac{1}{29} = 0{,}03448 + \frac{8}{29}$ di centomilesimi.

Moltiplicando i due termini di questa eguaglianza per 8, i prodotti saranno eguali, e si avrà:

[2] $\frac{8}{29} = 0{,}27584 + \frac{64}{29}$ di centomilesimi;

e osservando che $\frac{64}{29} = 2 + \frac{6}{29}$,

[3] $\frac{8}{29} = 0{,}27586 + \frac{6}{29}$ di centomilesimi;

dividendo i due membri di questa eguaglianza per 100000, si ha

[4] $\frac{8}{29}$ di centomilesimi $= 0{,}0000027586 + \frac{6}{29}$ di diecibilionesimi

Quindi il valore [1] di $\frac{1}{29}$ diventa

[5] $\frac{1}{29} = 0{,}0344827586 + \frac{6}{29}$ di diecibilionesimi.

Moltiplicando al modo stesso i due membri di questa eguaglianza per 6,

[6] $\frac{6}{29} = 0{,}2068965516 + \frac{36}{29}$ di diecibilionesimi.

Osservando che $\frac{36}{29} = 1 + \frac{7}{29}$, e dividendo i due membri dell' eguaglianza per 10 bilioni, si ha

$$\frac{6}{29} \text{ di diecibilionesimi}$$
$$= 0{,}00000000002068965517 + \frac{7}{29} \text{ di } \left(\frac{1}{10^{20}}\right),$$

e per conseguenza il valore di $\frac{1}{29}$ [5] diventa

[7] $\frac{1}{29} = 0{,}03448275862068965517 + \frac{7}{29}$ di $\left(\frac{1}{10^{20}}\right)$.

Moltiplicando per 7 i due membri di questa eguaglianza, si trova

$$\frac{7}{29} = 0{,}24137931034482758619 + \frac{49}{29} \text{ di } \frac{1}{10^{20}},$$

ovvero, osservando che

$$\frac{49}{29} = 1 + \frac{20}{29},$$

e dividendo per 10^{20} i due membri dell' eguaglianza, si ha

$$\frac{7}{29} \text{ di } \frac{1}{10^{20}} = 0{,}0000000 \ldots\ldots 02413793103448275862 0 + \frac{20}{29} \text{ di } \frac{1}{10^{40}};$$

ciò che sostituito nel valore (7) di $\frac{1}{29}$ dà

$$\frac{1}{29} = 0{,}0344827586206896551724137931034482758620 + \frac{20}{29} \text{ di } \frac{1}{10^{40}};$$

e poichè si hanno più di 28 cifre, siamo certi che il periodo deve esser completo; e invero si riconosce che le cifre decimali, a partire dalla 29ª, sono le stesse che a partire dalla prima, il periodo ha dunque 28 cifre.

Frazione ordinaria generatrice di una frazione periodica data.

219. Per cercare la frazione ordinaria, che ridotta in decimali dà luogo ad una frazione periodica data, osserveremo che questa frazione è il *limite* verso il quale tende il valore della frazione decimale quando si considera un numero di cifre di più in più grande.

Consideriamo primamente una frazione periodica semplice. Abbiasi la frazione

$$0{,}342\ 342\ 342\ 342\ldots.$$

Indichiamo con x il limite di questa frazione.

Sia a il valore approssimato di x, che si ottiene prendendo un numero di periodi limitato, tre per esempio. Avremo

$$(1)\qquad a = 0{,}342\ 342\ 342.$$

Moltiplicando per 1000 queste due quantità eguali, si ha

$$1000\ a = 342{,}342342.$$

Questo valore di 1000 a contiene nella sua parte decimale un periodo di meno del valore di a; e si vede che per avere lo stesso numero di periodi, basta aggiungere al valore di 1000 a la frazione 0,000000342 ovvero $\frac{342}{1000^3}$; si avrà dunque,

$$(2)\qquad 1000\ a + \frac{342}{1000^3} = 342{,}342342342.$$

Ciò posto, sottraendo l'eguaglianza (1) dalla (2), membro a membro, si ottiene

$$999\,a+\frac{342}{1000^3}=342.$$

Dividendo per 999 si ha

$$a+\frac{342}{999\times1000^3}=\frac{342}{999};$$

e per conseguenza

$$a=\frac{342}{999}-\frac{342}{999\times1000^3}.$$

Se si fosse indicato con a il valore approssimato di x, ottenuto prendendo n periodi, si sarebbe trovato $a=\frac{342}{999}-\frac{342}{999\times1000^n}$.

Se il numero n dei periodi aumenta indefinitamente, la frazione $\frac{342}{999\times1000^n}$ diverrà piccola quanto si vuole, donde segue che la quantità a ha per limite la frazione $\frac{342}{999}$. Si ha dunque

$$x=\frac{342}{999}.$$

Il ragionamento essendo generale, possiamo enunciare il teorema seguente:

La frazione ordinaria generatrice di una frazione periodica semplice ha per numeratore il periodo, e per denominatore un numero espresso da tanti 9 *quante sono le cifre del periodo.*

220. Osservazione. In generale si può rendere più semplice la frazione che si deduce dalla regola precedente, e far perdere al suo denominatore la forma particolare

che ha. Così, nell'esempio precedente i due termini di $\frac{342}{999}$ sono divisibili per 3, e questa frazione è uguale a $\frac{114}{333}$. Si può osservare solamente che il denominatore della frazione irriducibile equivalente alla proposta non può essere divisibile nè per 2 nè per 5, poichè il denominatore della proposta non è divisibile per questi numeri e perchè riducendo una frazione alla sua più semplice espressione si sopprimono dei fattori senza introdurne dei nuovi. Possiamo dunque enunciare il teorema seguente:

Il denominatore di una frazione irriducibile, generatrice di una frazione periodica semplice, non è divisibile nè per 2 nè per 5.

221*. Se la frazione proposta è composta di una parte intera e di una parte decimale, la riduzione in frazione ordinaria si effettua con eguale facilità.

Abbiasi per esempio la frazione 52,342 342 342....; questa frazione è eguale a 52+0, 342 342 342...., e quindi, per ciò che precede, eguale a $52+\frac{342}{999}$. Riducendo questa espressione al medesimo denominatore, si ha

$$\frac{999\times52+342}{999}=\frac{(1000-1)\times52+342}{999}=\frac{52342-52}{999}.$$

222*. La riduzione in frazione ordinaria di una frazione periodica mista potrebbe effettuarsi con un procedimento analogo a quello usato innanzi (220); ma è più semplice derivarla dal numero precedente.

Abbiasi la frazione periodica mista 0,34572572572.... Moltiplicando questa frazione per 100, si ha

34,572 572 572;

la quale espressione è uguale a

$$\frac{34572-34}{999}.$$

Quindi la frazione generatrice della frazione periodica mista proposta è

$$\frac{34572-34}{99900}.$$

Il ragionamento essendo generale possiamo enunciare il teorema seguente:

La frazione ordinaria generatrice di una frazione periodica mista, ha per numeratore il numero formato dalla parte non periodica seguita da un periodo, meno il numero formato dalla parte non periodica, e per denominatore il numero espresso da tanti 9 quante sono le cifre nel periodo, seguite da tanti zeri quante sono le cifre avanti il periodo.

223. Osservazione I. Il numeratore della frazione ordinaria che risulta dalla regola precedente non può terminare con un zero. Infatti, perchè ciò potesse aver luogo, bisognerebbe che l'ultima cifra della parte non periodica fosse la stessa dell'ultima cifra del periodo. Ma allora il periodo comincerebbe realmente un posto prima di quello che si è supposto. E invero supponiamo che invece della frazione decimale considerata nel numero precedente si abbia l'altra 0,32572572572....; allora il periodo non sarà più 572 ma 257, contrariamente all'ipotesi.

Osservazione II. La frazione ordinaria che risulta dalla regola precedente, può spesso essere ridotta ad una espressione più semplice. È però importante osservare che il denominatore di questa frazione, essendo formato di cifre 9 seguite da tanti zeri quante cifre non periodi-

che vi sono nella frazione decimale, contiene ciascuno dei fattori 2 e 5 tante volte quanto l'indica il numero di questi zeri. D'altra parte, il numeratore della frazione non terminando con uno zero, non può contenere che un solo dei fattori 2 e 5. Dunque, quando si ridurrà questa frazione alla sua più semplice espressione, se non è irriducibile, il suo denominatore conserverà uno almeno dei fattori 2 o 5, con uno esponente precisamente eguale al numero di zeri che lo terminano.

Possiamo dunque enunciare il teorema seguente:

Il denominatore della frazione irriducibile, generatrice di una frazione decimale periodica mista, è divisibile per l'uno o l'altro dei fattori 2 *e* 5 *presi con un esponente eguale al numero delle cifre decimali, che nella frazione decimale precedono il periodo.*

224. Se la frazione proposta fosse 679,34572572 ...., dividendola per 1000, si avrebbe 0,67934572572572....; la cui frazione ordinaria generatrice è

$$\frac{67934572-67934}{99900000};$$

quindi la frazione generatrice della proposta sarà

$$\frac{67934572-67934}{99900}.$$

225. I teoremi dimostrati nei numeri (209, 220, 223) danno il modo di decidere a priori qual sia la natura della frazione decimale che risulterà da una frazione ordinaria irriducibile qualunque.

Trascriviamo primieramente i tre teoremi:

1°. *Affinchè una frazione irriducibile possa esprimersi esattamente sotto forma di numero decimale, è necessario e sufficente che il suo denominatore non ammetta altri fattori primi fuori di* 2 *e di* 5 (209).

2°. *Il denominatore di una frazione irriducibile generatrice di una frazione periodica semplice, non è divisibile nè per 2 nè per 5* (220);

3°. *Il denominatore di una frazione irriducibile generatrice di una frazione periodica mista, è divisibile per l'uno o l'altro dei fattori 2 e 5, presi con un esponente eguale al numero di cifre che, nella frazione decimale, precedono il periodo* (223).

Queste proposizioni tiran dietro le due seguenti:

1ª. *Affinchè una frazione irriducibile ridotta in decimali produca una frazione periodica semplice è necessario e sufficente che il suo denominatore non sia divisibile nè per 2 nè per 5.*

Questa condizione è, infatti, necessaria in virtù del secondo dei teoremi che abbiamo enunciato, ed è sufficente, poichè supponendola sodisfatta, il 1° e il 3° di questi teoremi provano che la frazione decimale corrispondente alla frazione data, non può essere nè finita nè periodica mista, e per esclusione bisogna allora che sia periodica semplice.

2ª. *Affinchè una frazione irriducibile ridotta in decimali produca una frazione periodica mista, è necessario e sufficente che il suo denominatore ammetta uno almeno dei fattori 2 o 5, e inoltre altri fattori primi.*

Queste condizioni sono necessarie in virtù del 3° e del 1° teorema; e sono anche sufficenti, perchè supponendole sodisfatte, i teoremi 1° e 2° provano che la frazione decimale non può essere nè finita nè periodica semplice, e per esclusione bisogna allora che sia periodica mista.

Esempio. Se si riducessero in decimali le frazioni $\frac{3}{8}, \frac{4}{11}, \frac{17}{28}$, la prima produrrebbe una frazione finita, la seconda una frazione periodica semplice, e la terza una frazione periodica mista avente due cifre innanzi al periodo, poichè 28 contiene due volte il fattore 2.

Esercizi.

I. La frazione periodica 0,375375375.... ha per limite $\frac{375}{999}$ o $\frac{375375}{999999}$; secondochè si prende per periodo 375 o 375375: provare a priori l'eguaglianza di queste frazioni.

II. La frazione periodica mista 0,57832832832 può essere considerata come avente 283 per periodo e 5783 per parte non periodica; il limite è allora $\frac{5783283-5783}{9990000}$: provare la coincidenza di questo resultato con quello che si ottiene considerando la parte non periodica come ridotta a 57 e il periodo a 832.

III. Se una frazione irriducibile ha per denominatore un numero primo, e se il periodo della frazione decimale che risulta da essa ha un numero pari di cifre, la somma delle cifre che occupano lo stesso posto in ciascun mezzo periodo, sarà sempre eguale a 9.

IV. Se due frazioni irriducibili hanno lo stesso denominatore, e si riducono l'una e l'altra in decimali, i periodi avranno lo stesso numero di cifre.

V. Se si riduce in decimali una frazione ordinaria $\frac{m}{p}$ e che il periodo abbia $p-1$ cifre, disponendo queste cifre in cerchio in maniera che non vi sia più nè primo nè ultimo, il cerchio così ottenuto sarà indipendente dal numeratore m.

Esempio.

$$\frac{1}{7}=0,142857142857,$$

$$\frac{4}{7}=0,571428571428.$$

Questi due periodi disposti in cerchio danno l'uno e l'altro,

```
    1
 7     4
 5     2
    8
```

Per ottenere il primo bisogna leggere le cifre cominciando da 1, e il secondo cominciando da 5.

VI. Se si riducono in decimali tutte le frazioni irriducibili, di cui il denominatore è un numero primo p; e se si dispongono in cerchio i resti ottenuti nell'operazione, il numero dei cerchi distinti che si potranno formare in questa maniera è un divisore di $p-1$. Dedurre da ciò che il numero dei resti che formano uno di questi cerchi, e per conseguenza il numero delle cifre di un periodo, è pure un divisore di $p-1$.

VII. Dal 15 aprile 1838 al 30 settembre 1849 si sono cavati dalle mine di Pontgibaud 42750 metri cubi che hanno fornito, dopo la lavatura, 7304496 chilogrammi di minerale. Da questo minerale si sono cavati 1258708 chilogrammi di piombo e ch. 7656,346 d'argento. Dedurre da questi dati, a meno di un millesimo di chilogrammo, il peso del minerale cavato da un metro cubo di roccia estratta, e la quantità di piombo e di argento che corrisponde a 1250 chil. di minerale.

VIII. I dati essendo gli stessi della questione precedente, si valuta il metallo contenuto in 100 chilogrammi di minerale a fr. 32,19. Gr. 4,50 d'argento valendo un franco, a qual prezzo si valuta il piombo?

IX. Nella fabbrica di Tsiklovah (Ungheria) si trattano annualmente 112500 quint[li] metrici di minerale di rame argentifero. Il minerale contiene 2,40 per 100 di rame, e 0,0000695 d'argento. La perdita in rame è di 4 per 100, e la perdita in argento di 5 per 100. Calcolare i prodotti annuali e il loro valore, contando il chilogrammo d'argento a 220 franchi e il quintale di rame a 210 franchi.

X. I dati essendo gli stessi di quelli della questione precedente, valutare le quantità di mercurio consumate annualmente nella fabbrica di Tsiklovah, sapendo che si comincia per estrarre il rame dal minerale, poi che si estrae l'argento da quest'ultimo mediante il mercurio, la perdita in mercurio essendo di 0,00127 per uno di rame.

XI. Le fabbriche di zinco della Slesia hanno trattato nel 1838, 140830 quintali metrici di minerale, che rendevano

il 32 per 100. Il prezzo dello zinco era allora di fr. 18,75 il quintale; nel 1846 il prezzo si elevava a fr. 37,50 il quintale e si sono trattati 1180950 quintali di minerale, di cui la rendita era di 17 per 100. Qual è il rapporto dei valori prodotti nel 1838 e nel 1846?

XII. I dati essendo gli stessi delle questioni precedenti, trovare il prezzo del minerale fuso nel 1846, sapendo che si paga fr. 37,50 i mille chilogrammi. Trovare egualmente il prezzo del carbone, sapendo che si bruciano 752 chilogrammi di carbone per produrre 100 chilogrammi di zinco, e che 1000 chilogrammi di carbone valgono fr. 5,26.

XIII. Le miniere di rame dell'Inghilterra hanno prodotto nel 1847, 152615 tonnellate di minerale, dalle quali si sono estratte 13900 tonnellate di rame. Dnrante lo stesso anno si sono importate in Inghilterra 41490 tonnellate di minerale straniero (Chili e Anstralia) che hanno prodotto 9009 tonnellate di rame. Qual è la ricchezza in rame del minerale indigeno e quella del minerale importato?

XIV. Qual'è il peso del carbone consumato nel trattamento metallurgico dei minerali di rame dell'Inghilterra, sapendo che per ogni chilogrammo di minerale si consumano fr. 538 di carbone?

XV. Se due frazioni irriducibili $\frac{N}{D}$, $\frac{n}{d}$ convertite in decimali danno luogo a periodi composti rispettivamente di M, m cifre, nel caso in cui D è divisibile per d, il numero M è egualmente divisibile per m.

XVI. Se più frazioni irriducibili, di cui i denominatori sono primi fra loro, o non hanno altri fattori comuni che potenze di 2 o 5, danno luogo a periodi di $m, m', m'', \ldots$ cifre, qualunqne frazione irriducibile, avente per denominatore il prodotto dei denominatori delle prime, conduce a un periodo di cui il numero delle cifre è il minimo mnltiplo di $m, m', m'', \ldots$ ec.

XVII. p essendo un numero primo, se $\frac{1}{p^h}$ produce un periodo di m cifre, $\frac{1}{p^{h+1}}$ produrrà un periodo di cui il numero delle cifre sarà m o mp. Se qnest'ultimo caso ha luogo $\frac{1}{p^{h+\alpha}}$ produrrà un periodo di mp^{α} cifre.

CAPITOLO XI.

TEORIA DEI QUADRATI E DELLE RADICI QUADRATE.

—

Quadrato della somma di due numeri.

226. Sia $(a+b)$ la somma proposta. Fare il quadrato di questa somma significa moltiplicare $a+b$ per $a+b$; e per questo (46) bisogna moltiplicare le due parti del moltiplicando per le due parti del moltiplicatore e aggiungere i resultati; si ha dunque

$$(a+b)^2 = a\times a + b\times a + a\times b + b\times b,$$

cioè a dire

$$(a+b)^2 = a^2 + 2a\times b + b^2;$$

resultato che s' enuncia così: *Il quadrato della somma di due numeri è eguale al quadrato del primo, più due volte il prodotto del primo per il secondo, più il quadrato del secondo.*

Osservazione I. *Il quadrato di un numero composto di decine e di unità è eguale al quadrato delle decine, più due volte il prodotto delle decine per le unità, più il quadrato delle unità.*

227. Osservazione II. *La differenza dei quadrati di due numeri interi consecutivi è eguale al doppio del più piccolo, aumentato di una unità.*

Se, infatti, s'indicano questi due numeri con a e $a+1$, avremo:

$$(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1,$$

la differenza $(a+1)^2 - a^2$, è dunque $2a+1$.

Quadrato di un prodotto.

228. Sia $a \times b \times c \times d$ un prodotto qualunque; formarne il quadrato significa moltiplicare $a \times b \times c \times d$ per $a \times b \times c \times d$; il resultato di questa moltiplicazione è (42) il prodotto di otto fattori:

$$a \times b \times c \times d \times a \times b \times c \times d;$$

ma al prodotto di due fattori si può sostituire il loro prodotto effettuato, quindi il prodotto precedente può scriversi sotto la forma:

$$a^2 \times b^2 \times c^2 \times d^2,$$

dunque: *il quadrato di un prodotto è il prodotto dei quadrati dei fattori.*

229. Osservazione. Se alcuni fattori sono potenze, per elevarle a quadrato basterà raddoppiare i loro esponenti. Debbasi, per esempio, formare il quadrato di a^5; a^5 essendo il prodotto di 5 fattori eguali ad a, il suo quadrato è il prodotto di 10 fattori eguali ad a, e per conseguenza a^{10}.

Teoremi relativi ai quadrati.

230. Teorema I. *Il quadrato di un numero intero non può terminare per nessuna delle cifre* 2, 3, 7 e 8.

Quando si moltiplica un numero intero per sè stesso, le unità del prodotto provengono dal prodotto delle unità del moltiplicando per quelle del moltiplicatore, cioè a dire dal quadrato della cifra delle unità. Ora, qualunque siasi questa cifra delle unità, il suo quadrato è: 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, e non è, per conseguenza, terminato da niuna delle cifre 2, 3, 7 o 8.

231. Osservazione. I numeri terminati da 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 o 9, hanno i loro quadrati terminati rispettivamente da 0, 1, 4, 9, 6, 5, 9, 4 o 1; se dunque un quadrato termina con 0 o con 5, il numero corrispondente terminerà pure al modo stesso, ma, in qualunque altro caso, conosciuta l'ultima cifra del quadrato, quella del numero stesso può avere due soli valori; così i numeri che terminano con 1, 4, 9, 6 provengono rispettivamente dai numeri che terminano con 1 o 9, 2 o 8, 3 o 7, 4 o 6.

232. Teorema II. *Il quadrato di un numero intero non può terminare con un numero impari di zeri.*

Affinchè il quadrato di un numero termini con uno zero, è necessario (231) che il numero stesso termini con uno zero. Questo numero si può dunque rappresentare con $A\times10^n$, A essendo un numero intero non terminato da uno zero, ed n il numero degli zeri che lo seguono; n può anche essere eguale a 1. Il quadrato di questo numero, $A^2\times10^{2n}$, termina evidentemente con $2n$ zeri, cioè con un numero pari di zeri, come si voleva dimostrare.

233. Teorema III. *La condizione necessaria e sufficiente, affinchè un numero intero sia il quadrato di un altro numero intero, è che tutti i suoi fattori primi abbiano esponenti pari.*

1°. Questa condizione è necessaria, giacchè il quadrato di un numero risoluto in fattori primi, si forma raddoppiando gli esponenti di questi fattori, i quali per conseguenza diventano tutti pari.

2°. Questa condizione è sufficiente, giacchè, se essa è sodisfatta, dividendo per 2 gli esponenti dei fattori primi, si formerà un nuovo numero che elevato a quadrato riprodurrà il primo.

234. Osservazione. Un numero intero che ammette

un divisore primo p, senza esser divisibile pel suo quadrato p^2, non può essere un quadrato; giacchè decomponendolo in fattori primi, il fattore p vi entrerebbe evidentemente alla prima potenza e per conseguenza con un esponente dispari.

Per esempio, un quadrato non può essere divisibile per 2 senza esserlo per 4, per 3 senza esserlo per 9, per 5 senza esserlo per 25.

235. Teorema IV. *Il quadrato di una frazione non può essere un numero intero.*

Sia $\frac{a}{b}$ una frazione, che supporremo ridotta alla sua più semplice espressione, il suo quadrato è evidentemente $\frac{a^2}{b^2}$; ora, a essendo primo con b, a^2 è primo con b^2; dunque è impossibile che $\frac{a^2}{b^2}$ sia intero.

236. Osservazione. a^2 essendo primo con b^2, $\frac{a^2}{b^2}$ è irriducibile. E poichè i suoi due termini sono quadrati si deduce che il quadrato di una frazione essendo ridotto alla sua più semplice espressione ha sempre per termini dei quadrati.

Definizione della radice quadrata.

237. Quando un numero A è il quadrato di un altro numero B si dice che B è la radice quadrata di A, e si scrive così:

$$B = \sqrt{A}.$$

Esempio. 4 essendo il quadrato di 2. 2 è la radice quadrata di 4.

$\frac{9}{25}$ essendo il quadrato di $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{5}$ è la radice quadrata di $\frac{9}{25}$.

E si scrive:

$$2=\sqrt{4},\ \frac{3}{5}=\sqrt{\frac{9}{25}}.$$

238. Qualunque numero che è il quadrato di un numero intero o frazionario si dice un *quadrato perfetto*.

Qualunque numero che non è nè intero nè frazionario, si dice *incommensurabile*.

Abbiamo veduto (235) che se un numero intero non è il quadrato di un numero intero, non può essere il quadrato di una frazione; dunque non è un quadrato perfetto. Similmente, una frazione irriducibile i cui due termini non sono quadrati perfetti non può essere un quadrato perfetto (236).

Da ciò segue che la radice quadrata di un numero N che non è quadrato perfetto, non può esprimersi nè con un numero intero nè con una frazione, e quindi è un numero incommensurabile. Ora queste radici quadrate hanno bisogno di una nuova definizione, poichè quella che abbiamo già data (237) non vi si può evidentemente applicare.

La radice quadrata di un numero N che non è quadrato perfetto si definisce dicendo che *è un numero incommensurabile maggiore dei numeri i cui quadrati sono inferiori ad* N, *e minore dei numeri i cui quadrati sono superiori ad* N.

È facile vedere che $\sqrt{N}$ è effettivamente un numero, cioè può esprimere la misura di una grandezza. Consideriamo, per esempio, il cammino percorso da un mobile che parte da un punto di una linea retta indefinita e si muove su questa retta sempre nello stesso senso. Il cammino di cui si tratta, crescerà in un modo *continuo* a cominciare da zero; il quadrato del numero che lo misura, prima minore di N, finirà per divenire più grande

di N. Si concepisce che in un certo istante il cammino percorso sarà maggiore di tutte le lunghezze misurate dai numeri i cui quadrati sono più piccoli di N, e minore delle lunghezze misurate dai numeri i cui quadrati sono più grandi di N; in questo istante, il cammino percorso dal mobile sarà misurato da $\sqrt{N}$.

239. L'operazione mediante la quale si determina la radice quadrata di un numero è detta *estrazione della radice quadrata.*

La questione che ci proponiamo di risolvere può enunciarsi nel seguente modo:

Essendo dato un numero N *intero o frazionario, estrarre la sua radice quadrata esattamente, se* N *è un quadrato perfetto, e con una data approssimazione nel caso contrario.*

Radice quadrata a meno di una unità.

240. La radice quadrata di un numero a meno di una unità, è il massimo numero intero che sia contenuto nella radice quadrata di questo numero; essa è, per conseguenza, la radice del massimo quadrato intero contenuto nel numero considerato.

241. TEOREMA I. *La radice quadrata a meno di un' unità di un numero frazionario* N, *è uguale alla radice quadrata a meno di un' unità della parte intera di* N.

Supponiamo, infatti, che N sia compreso, per esempio, tra 3758 e 3759, si tratta di provare che la sua radice quadrata a meno di un' unità è la stessa di quella di 3758. E invero, per ciò che si è detto innanzi (240), la radice quadrata di N a meno di un' unità, è la radice quadrata del massimo quadrato intero contenuto in N. Ora, i numeri interi contenuti in N,

sono 3758 e i numeri minori, in guisa che il massimo quadrato intero contenuto in N è lo stesso che il massimo quadrato intero contenuto in 3758. E per conseguenza, la radice di N a meno di un' unità è la stessa di quella di 3758.

242*. TEOREMA II. *Se un numero intero ha* 2n *o* 2n − 1 *cifre, la sua radice quadrata ha* n *cifre.*

Un numero di una cifra è uguale o maggiore di 1 e minore di 10^1; un numero di due cifre è uguale o maggiore di 10^1 e minore di 10^2; un numero di tre cifre è uguale o maggiore di 10^2 e minore di 10^3; e in generale un numero di n cifre è uguale o maggiore di 10^{n-1} e minore di 10^n.

Ciò posto, supponiamo di volere estrarre la radice quadrata di un numero N di $2n$ cifre. Da ciò che precede si ha che

$$N < 10^{2n},\quad N \geqq 10^{2n-1},\ \text{e a più forte ragione } N \geqq 10^{2n-2};$$

quindi

$$\sqrt{N} < 10^n,\quad \sqrt{N} \geqq 10^{n-1}.$$

Dunque il numero delle cifre di $\sqrt{N}$ è n.

Se N ha $2n-1$ cifre, avremo

$$N \geqq 10^{2n-2},\ N < 10^{2n-1}\ \text{e a più forte ragione } N < 10^{2n};$$

quindi

$$\sqrt{N} \geqq 10^{n-1},\quad \sqrt{N} < 10^n.$$

Dunque il numero delle cifre di $\sqrt{N}$ è n.

243. Quando un numero è minore di 100, la tavola di moltiplicazione fa conoscere il maggior quadrato che vi sia contenuto, e per conseguenza la sua radice quadrata a meno di una unità

ESEMPIO. La radice quadrata di 73 a meno di una unità, è 8, giacchè 64 è il maggior quadrato intero contenuto in 73.

Quando un numero è maggiore di 100, la sua radice quadrata a meno di un'unità, ha più di una cifra; il metodo che si usa per trovarla riposa sui due seguenti teoremi:

244. Teorema III. *La radice quadrata di un numero* N *maggiore di* 100, *contiene precisamente tante decine quante sono le unità della radice quadrata del numero delle sue centinaia.*

Se indichiamo con x il numero delle diecine di $\sqrt{N}$, $\sqrt{N}$ è compresa tra $x \times 10$ ed $(x+1) \times 10$; dunque N è compreso tra il quadrato di $x \times 10$ ovvero $x^2 \times 100$, e il quadrato di $(x+1) \times 10$ ovvero $(x+1)^2 \times 100$. Per conseguenza il numero delle centinaia di N è compreso tra x^2 e $(x+1)^2$; o in altri termini, x^2 è il maggior quadrato intero contenuto nelle centinaia di N, ed x è la radice di questo maggior quadrato.

Osservazione. Per avere il numero delle diecine contenute nella radice quadrata di un numero, si è veduto che bisogna cercare quante centinaia contiene questo numero, ed estrarre la radice quadrata del resultato, a meno di una unità. Quando il numero dato è intero, si avrà immediatamente il numero delle centinaia, sopprimendo le due ultime cifre a destra. Si può dunque dire:

Il numero delle diecine contenute nella radice quadrata di un numero intero N *è la radice quadrata a meno di una unità del numero* N_1 *ottenuto cancellando le due ultime cifre di* N.

Se N_1 è maggiore di 100, si può applicare il resultato precedente alla radice del numero N_1. Il numero delle diecine che vi sono contenute si otterrà estraendo a meno di una unità la radice quadrata del numero N_2 ottenuto sopprimendo le due ultime cifre di N_1.

Ora, la radice di N_1 rappresentando il numero delle

diecine contenute nella radice di N, il numero delle diecine che contiene $\sqrt{N_1}$, altro non è che il numero delle centinaia contenute in $\sqrt{N}$. D'altra parte, N_1 essendosi ottenuto sopprimendo le due ultime cifre a destra di N ed N_2 sopprimendo le due ultime cifre a destra di N_1, N_2 può ottenersi cancellando quattro cifre a destra di N. Si può dire dunque:

Il numero delle centinaia contenute nella radice quadrata di un numero intero N, *è la radice quadrata a meno di una unità del numero* N_2 *ottenuto sopprimendo le quattro ultime cifre di* N.

Al modo stesso si vedrà che il numero delle diecine contenute nella radice quadrata di N_2, cioè a dire, il numero di migliaia contenute nella radice quadrata di N, è uguale alla radice quadrata del numero N_3, ottenuto sopprimendo le due ultime cifre di N_2, cioè sopprimendo le sei ultime cifre di N. Si può dunque dire:

Il numero delle migliaia contenute nella radice quadrata di un numero intero N *è la radice quadrata a meno di una unità del numero ottenuto sopprimendo le sei ultime cifre di* N, e così di seguito indefinitamente.

245. Teorema IV. *Se da un numero intero* N *si toglie il quadrato delle diecine della sua radice, e si dividono le diecine del resto pel doppio di quelle della radice, si ottiene un quoziente superiore o eguale alla cifra delle unità della radice.*

Indichiamo con a il numero delle diecine di $\sqrt{N}$, e con b la cifra delle unità di questa radice. La parte intera di $\sqrt{N}$ è $a\times10+b$; quindi, N è almeno eguale ad $(a\times10+b)^2$, ovvero ad $a^2\times100+2a\times10\times b+b^2$. Se dunque si toglie da N il quadrato delle diecine della sua radice, cioè: $a^2\times100$, il resto $N-a^2\times100$, che indicheremo con R, sarà almeno eguale a $2a\times10\times b+b^2$

e conterrà almeno $2a \times b$ diecine. Da ciò segue che dividendo per $2a$ il numero delle diecine di R, si troverà un quoziente eguale o superiore a b.

246. Osservazione. Per determinare il valore esatto della cifra delle unità, bisogna provare successivamente il limite dato dal teorema precedente, se è minore di dieci, e i numeri di una cifra che gli sono inferiori. Le prove da fare consistono nel formare il quadrato della radice presunta, e vedere se questo quadrato è contenuto nel numero proposto: quando ciò non avviene la cifra provata deve essere diminuita. Vedremo più lungi come si abbreviano queste prove, profittando dei calcoli fatti anteriormente.

Regola generale per l'estrazione della radice quadrata.

247. Per trovare quante diecine contiene la radice quadrata di un numero intero, basta (244) estrarre la radice da un numero avente due cifre di meno. Conosciuto il numero delle diecine, si può trovare la cifra delle unità. Dunque la ricerca della radice quadrata di un numero è ridotta a quella di un altro numero che ha due cifre di meno; a questo nuovo numero si potrà al modo stesso sostituire un altro anche più semplice, e cosi di seguito, sino a che si pervenga a un numero di una o due cifre, di cui si conoscerà immediatamente la radice.

Siamo quindi condotti alla seguente regola:

1°. *Per estrarre la radice quadrata da un numero intero, si divide questo numero in classi di due cifre cominciando dalla destra: il numero di queste classi, di cui l'ultima può avere una sola cifra, è quello delle cifre della radice.*

Se infatti, vi sono n classi, il numero proposto

contiene $2n$ o $2n-1$ cifre, e allora (242) la sua radice quadrata ha n cifre.

2°. *La prima cifra della radice è la radice quadrata a meno di una unità, del numero espresso dall' ultima classe.*

Consideriamo, per esempio, il numero $N=13764932$, al quale riferiremo tutte le seguenti spiegazioni. Il numero delle diecine di $\sqrt{N}$ (244), è la radice quadrata a meno di una unità di 137649. Il numero delle centinaia di $\sqrt{N}$ è (244) la radice quadrata a meno di una unità di 1376, e il numero delle sue migliaia, la radice quadrata a meno di una unità di 13 (244). Ora, 13 è precisamente l' ultima classe del numero proposto; dunque la seconda parte della regola è dimostrata, e la radice quadrata di 13, o 3, è la prima cifra della radice.

3°. *Dopo avere ottenuta questa prima cifra, se ne forma il quadrato, che si toglie dal numero espresso dall'ultima classe; accanto al resto si scrivono le due cifre che formano la classe seguente e si dividono le diecine del numero* R_1 *così formato, pel doppio della prima cifra della radice. Il quoziente è uguale o superiore alla seconda cifra.*

Per trovare il numero delle centinaia, cioè a dire le due prime cifre della radice cercata, basta estrarre la radice da 1376, di cui si conosce già la cifra delle diecine 3; per questo oggetto si toglierà da 1376, il quadrato delle tre diecine della sua radice, e dividendo le diecine del resto pel doppio di quelle della radice, si otterrà (245) un quoziente maggiore o eguale alla cifra delle unità.

Il quadrato delle 3 diecine è 9 centinaia, le quali, tolte da 1376, lasciano per resto 476; dividendo 47 per 6, il quoziente è 7, la cifra delle unità della radice di 1376, cioè a dire la seconda cifra della radice cercata, non può dunque superare 7.

4°. *Il valore esatto di questa seconda cifra si determina provando successivamente il quoziente trovato, se è minore di* 10, *e i numeri di una cifra che gli sono inferiori. Per fare queste prove, si raddoppia la prima cifra della radice, si scrive, alla destra del resultato, la cifra da provare, e si moltiplica il numero così formato per la cifra stessa provata. Se il prodotto è minore del numero* R_1, *definito* (3°), *la cifra provata è esatta, altrimenti bisogna provare la cifra inferiore di una unità, e così di seguito se quest' ultima fosse troppo grande.*

Il numero R_1, definito (3°), è nel caso attuale 476, che si è ottenuto togliendo da 1376 il quadrato delle tre diecine che contiene la sua radice. Ora, questa radice essendo composta di tre diecine, più un certo numero di unità, il suo quadrato si compone (226) del quadrato delle tre diecine, del prodotto delle unità pel doppio delle tre diecine, e del quadrato delle unità; e poichè la somma di queste tre parti deve essere contenuta in 1376, ne segue che la somma delle due ultime deve potersi togliere dall' eccesso di 1376 sulla prima parte, cioè da 476. Ora, la quarta parte della regola consiste precisamente in questa verificazione; e infatti, quando per provare 7 si moltiplica questo numero, come abbiamo indicato, per 67, il prodotto si compone di $7\times7+7\times60$, cioè del quadrato delle unità presunte, più il prodotto di queste unità, pel doppio delle diecine. Se dunque il prodotto non può sottrarsi da 476, la cifra 7 è troppo grande.

Nel caso attuale questo prodotto è uguale a 469, che può togliersi da 476 e lascia per resto 7. La cifra 7 è dunque esatta. L' operazione ci dice inoltre, che l' eccesso di 1376 sul quadrato di 37, è uguale a 7.

5°. *Alla destra del resto ottenuto nell' operazione*

precedente, si scrivono le due cifre della classe seguente, e si dividono le diecine del numero R_2 *così formato, pel doppio del numero che esprimono le due prime cifre della radice; il quoziente è maggiore o eguale alla terza cifra.*

Il numero delle diecine contenute nella radice, è (244) la radice quadrata a meno di un'unità di 137649. Dunque, per trovare il numero di queste diecine, cioè l'insieme delle tre prime cifre della radice, basta estrarre la radice quadrata di 137649, di cui già si conosce il numero delle diecine 37. A quest'oggetto, si toglierà da 137649 il quadrato delle 37 diecine della sua radice, e dividendo le diecine del resto, pel doppio di quelle della radice, si otterrà (245) un quoziente maggiore o uguale alla cifra delle sue unità.

Il quadrato delle 37 diecine è 1369 centinaia. L'eccesso di 137649 sul quadrato delle 37 diecine, o il numero R_2, è dunque 749; dividendo il numero delle sue diecine, 74, per 74 doppio di 37, il quoziente è 1; dunque la cifra delle unità della radice di 137649, cioè la terza cifra della radice cercata, non può superare 1.

6°. *Il valore esatto di questa terza cifra si determina, provando successivamente il quoziente trovato se è minore di* 10, *e i numeri di una cifra che gli sono inferiori. Per fare queste prove si raddoppia il numero formato dall' insieme delle due prime cifre, si scrive alla sua destra la cifra da provare, e si moltiplica il numero così formato per la cifra stessa provata. Se questo prodotto può togliersi dal numero* R_2, *definito* (5°), *la cifra provata è esatta, altrimenti bisogna diminuirla di un' unità e provarla di nuovo.*

Il numero R_2, definito (5°), è, nel caso attuale, 749, che si è ottenuto togliendo da 137649 il quadrato delle 37 diecine della sua radice. Ora, questa radice essendo

composta di 37 diecine, più un certo numero di unità, il suo quadrato si compone del quadrato delle 37 diecine, del prodotto delle unità pel doppio di 37 diecine, e del quadrato delle unità. E poichè la somma di queste tre parti dev'essere contenuta in 137649, ne segue che la somma delle due ultime debba potersi togliere dall'eccesso di 137649 sulla prima parte, cioè a dire da 749. Ora, la sesta parte della regola consiste precisamente in questa verificazione; e infatti, quando per provare 1 si moltiplica, come si è indicato, la cifra 1 pel numero 741, il prodotto si compone di $1 \times 1 + 1 \times 740$, cioè del quadrato delle unità, e del prodotto di queste unità presunte pel doppio delle diecine. Se dunque questo prodotto non potesse togliersi da 749, la cifra 1 sarebbe troppo grande.

Nel caso attuale, il prodotto è uguale a 741, che può togliersi da 749, e lascia per resto 8. La cifra 1 è dunque esatta, e l'operazione ci fa vedere inoltre che l'eccesso di 137649 sul quadrato di 371, è 8.

7°. *Quando si è trovata la terza cifra, un procedimento affatto simile fornisce la quarta, poi la quinta*, ec.

Ciò non ha bisogno di spiegazioni.

Nel caso attuale, per determinare la quarta cifra della radice, si scriverà alla destra del resto 8 la classe seguente 32, e si dividerà 83, numero delle diecine di 832 pel doppio di 371, cioè per 742; il quoziente di questa divisione essendo 0, la cifra delle unità della radice è 0. È evidente ch'è inutile provarla.

La radice quadrata di 13764932 è dunque 3710, e il resto 832, cioè che:

$$13764932 = (3710)^2 + 832,$$

come è del resto facile verificare.

248. Teorema V. *Il resto ottenuto nell' estrazione*

di una radice quadrata, non può mai superare il doppio della radice.

Siano infatti N un numero intero, e R la sua radice quadrata a meno di un' unità; il resto dell'operazione è la differenza $N-R^2$; se questo resto superasse $2R$, N sarebbe almeno eguale ad R^2+2R+1, cioè ad $(R+1)^2$, e la sua radice sarebbe per conseguenza almeno eguale ad $R+1$.

Reciprocamente, se il quadrato di un numero intero R è minore di N e che la differenza $N-R^2$ non superi $2R$, questo numero R è la radice quadrata di N a meno di un' unità.

Infatti, $N-R^2$ essendo minore di $2R+1$, N è minore di R^2+2R+1, cioè di $(R+1)^2$, e per conseguenza, R^2 è il maggiore quadrato intero che vi sia contenuto.

249. OSSERVAZIONE. Talune volte accade che l'abitudine del calcolo facendo presumere che una cifra da provare sia troppo grande, si diminuisca immediatamente di una o più unità; provandolo dopo questa diminuzione, si vede se è troppo grande, e se è troppo piccolo ne saremo avvertiti dal teorema precedente, perchè il resto corrispondente supererà il doppio del numero formato dalle cifre già trovate della radice.

Modo di disporre l' operazione.

250. Prendiamo per esempio il numero 412234, al quale applicheremo la regola precedente:

412234	642
36	124
522	4
496	1282
2634	2
2564	
70	

1°. Si divide il numero in classi di due cifre; queste classi essendo in numero di 3, la radice avrà 3 cifre.

2°. La radice quadrata dell' ultima classe 41 è 6; 6 è dunque la prima cifra della radice.

3°. Da 41 si toglie il quadrato di 6, il resto è 5. Alla destra di 5 si scrive la seconda classe 22 e si divide 52, numero delle diecine di 522, pel doppio della cifra 6 scritta alla radice. Il quoziente 4 di questa divisione è la seconda cifra della radice, o una cifra troppogrande.

4°. Per provare 4, si scrive alla destra del doppio della prima cifra, e si moltiplica il numero 124 così formato per 4. Il prodotto 496 potendo togliersi da 522, e lasciando per resto 26, la cifra 4 è esatta.

5°. Alla destra del resto 26 si scrive la terza classe del numero proposto, e si divide 263, numero delle diecine di 2634, pel doppio del numero 64 scritto alla radice, cioè per 128. Il quoziente 2 di questa divisione è la terza cifra della radice, o una cifra troppo grande.

6°. Per provare 2, si scrive alla destra del doppio del numero espresso dalle due prime cifre, e si moltiplica il numero 1282, così formato, per 2. Il prodotto 2564 potendo togliersi da 2634, la cifra 2 è esatta, e la radice è 642; il resto è 70.

251*. Supponiamo che estraendo la radice quadrata a meno di una unità di un numero qualunque N si sia trovato il numero a; $\sqrt{N}$ è compresa fra a ed $a+1$; ma quale di questi due valori è più vicino al vero, o in altri termini $\sqrt{N}$ è compresa fra a e $a+\frac{1}{2}$ o fra $a+\frac{1}{2}$ e $a+1$? Per rispondere a questa quistione osserviamo che allorquando $\sqrt{N}$ è compresa fra a ed $a+\frac{1}{2}$, N sarà compresa fra a^2 ed $\left(a+\frac{1}{2}\right)^2$, ovvero fra a^2 ed $a^2+a+\frac{1}{4}$;

ora si ha $N = a^2 + r$, r essendo il resto trovato nell'estrazione della radice quadrata di N, ne segue che se r è uguale o minore di a, N è per l'appunto compresa fra i limiti precedenti; ed in questo caso a sarà la radice quadrata di N a meno di $\frac{1}{2}$. Similmente allorquando $\sqrt{N}$ è compresa fra $a + \frac{1}{2}$ ed $a+1$, N sarà compresa fra $a^2 + a + \frac{1}{4}$ ed $a^2 + 2a + 1$; la qual condizione sarà verificata allorchè r sarà maggiore di a e per conseguenza di $a + \frac{1}{4}$. Quando ciò avvenga $a+1$ sarà la radice quadrata di N a meno di $\frac{1}{2}$.

Possiamo dunque enunciare la seguente regola:

La radice del massimo quadrato contenuto in un numero dato, sarà la radice di questo numero a meno di una mezza unità per difetto, se il resto è eguale a questa radice o minore di essa, e questa radice aumentata di un'unità sarà la radice del numero dato a meno di una mezza unità per eccesso, se il resto è maggiore della radice.

252. La ricerca della radice quadrata di un numero a meno di una unità può abbreviarsi in virtù del seguente teorema:

Teorema. *Trovata più della metà delle cifre della radice quadrata di un numero intero, si possono trovare tutte le altre mediante una sola divisione.*

Sia N un numero intero. Supponiamo che la parte intera di $\sqrt{N}$ abbia $2n+1$ o un maggior numero di cifre, che si sieno trovate le prime, e che le rimanenti sieno in numero di n. Indichiamo con a il numero formato dalle cifre conosciute di $\sqrt{N}$ seguite da n zeri, e con x il numero generalmente incommensurabile che

bisogna aggiungere ad a per avere il valore esatto di $\sqrt{N}$. Si avrà $N=(a+x)^2$ e quindi

$$N=a^2+2ax+x^2;$$

togliendo dalle due parti a^2 si ha

$$N-a^2=2ax+x^2;$$

e dividendo i due membri di questa eguaglianza per $2a$, si ottiene

$$\frac{N-a^2}{2a}=x+\frac{x^2}{2a}.$$

Sia q la parte intera del quoziente della divisione di $N-a^2$ per $2a$, ed r il resto; avremo $N-a^2=2aq+r$, da cui

$$\frac{N-a^2}{2a}=q+\frac{r}{2a};$$

e per conseguenza

$$x+\frac{x^2}{2a}=q+\frac{r}{2a},$$

e togliendo dalle due parti $\frac{x^2}{2a}$,

$$x=q+\frac{r}{2a}-\frac{x^2}{2a}.$$

Poichè la parte intera di x ha n cifre, x è minore di 10^n, e per conseguenza x^2 è minore di 10^{2n}; ma per ipotesi a contiene almeno $2n+1$ cifre, dunque $a\times2$ è maggiore di 10^{2n}. Da ciò risulta che la frazione $\frac{x^2}{2a}$ è minore dell'unità. Ma $\frac{r}{2a}$ è anche minore dell' unità, per conseguenza l'errore che si commette prendendo $x=q$ sarà minore di un' unità.

Le due eguaglianze

$$(a+q)^2=a^2+2aq+q^2,$$
$$N=a^2+2aq+r;$$

mostrano che se $r>q^2$, $a+q$ sarà il valore approssimato di $\sqrt{N}$ per difetto; se $r<q^2$, questo valore sarà approssimato per eccesso; finalmente se $r=q^2$, $a+q$ sarà il valore esatto di $\sqrt{N}$.

253. Osservazione. Quando la prima cifra a sinistra di a è eguale o maggiore di 5, il teorema precedente ha luogo anche quando si sia trovata la sola metà delle cifre della radice. Infatti se la parte intera di $\sqrt{N}$ contiene $2n$ cifre, a ne conterrà pure $2n$, e $a\times2$ ne conterrà $2n+1$; quindi $a\times2$ sarà sempre maggiore di 10^{2n} mentre x^2 è minore di 10^{2n}.

Esempio I. Sia $N=255896733$; la radice deve contenere cinque cifre. Supponiamo che col metodo ordinario si sia trovato 159 pel numero formato dalle tre prime cifre; si avrà $a=15900$. Il resto $N-a^2$ è 3086734, e la divisione di questo resto per 2×15900 dà per quoziente intero $q=97$ e per resto $r=21$. Quindi la radice è 15997 a meno di un' unità per eccesso.

Esempio II. Sia $N=324012895737$; la radice deve contenere sei cifre. Col metodo ordinario si sono trovate le tre prime cifre della radice 569; si ha $a=569000$. Il resto $N-a^2$ è uguale a 251895737; dividendo questo numero per 2×569000 si trova $q=221$, $r=397737$. Quindi 569221 è la radice a meno di un'unità per difetto, perchè $r>q^2$.

Calcolo delle radici quadrate con una data approssimazione.

254. Le radici dei numeri che non sono quadrati perfetti possono determinarsi con quella approssima-

zione che si vuole. Infatti, un numero N qualunque può sempre porsi sotto la forma $\frac{N\times n^2}{n^2}$; quindi avremo

$$\sqrt{N}=\frac{\sqrt{N\times n^2}}{n}.$$

Estraendo la radice quadrata a meno di un' unità dal prodotto $N\times n^2$, supponiamo che siasi trovato il numero m; è chiaro che $\sqrt{N\times n^2}$ sarà compresa fra m ed $m+1$; quindi, evidentemente $\sqrt{N}$ sarà compresa fra $\frac{m}{n}$ ed $\frac{m+1}{n}$, e l'errore che si commette nel prendere l'uno o l'altro di questi due valori, differisce dal vero per meno di $\frac{1}{n}$.

Possiamo dunque enunciare la regola seguente:

Per estrarre la radice quadrata da un numero N *a meno di un numero dato* $\frac{1}{\mathrm{n}}$, *bisogna estrarre a meno di un' unità la radice quadrata del prodotto* $\mathrm{N}\times\mathrm{n}^2$, *e dividere il resultato per* n.

Esempio. Debbasi estrarre la radice quadrata di $\frac{73}{5}$ a meno di $\frac{1}{7}$; moltiplichiamo $\frac{73}{5}$ per 49, quadrato di 7, il prodotto è $\frac{73\times 49}{5}$, cioè $\frac{3577}{5}$ o $713\frac{2}{5}$; la sua radice quadrata a meno di un' unità, la stessa di quella di 713 (241), è uguale a 26, e per conseguenza la radice di $\frac{73}{5}$ a meno di $\frac{1}{7}$ è $\frac{26}{7}$, cioè che la radice quadrata di $\frac{73}{5}$ è compresa fra $\frac{26}{7}$ e $\frac{27}{7}$.

255. *Quando il denominatore di una frazione è un quadrato perfetto* b^2, *la radice quadrata di questa fra-*

zione a meno di $\frac{1}{b}$ *si ottiene estraendo la radice quadrata del numeratore a meno di un' unità, e dividendo il risultato per* b.

Questa proposizione risulta immediatamente dalla regola generale; giacchè, secondo questa regola, per estrarre la radice quadrata da $\frac{a}{b^2}$ a meno di $\frac{1}{b}$, bisogna moltiplicare $\frac{a}{b^2}$ per b^2, estrarre la radice quadrata del prodotto a a meno di un' unità, e dividere il resultato per b, ciò che è precisamente l' operazione indicata.

Per estrarre la radice quadrata di una frazione, si comincia spesso per rendere il suo denominatore un quadrato perfetto, moltiplicando i suoi due termini pel denominatore, e poi si profitta dell' osservazione precedente.

Esempio. Debbasi estrarre la radice quadrata da $\frac{73}{5}$; questa frazione è uguale a $\frac{73\times5}{5\times5}$ o $\frac{365}{25}$. Per avere la sua radice quadrata a meno di $\frac{1}{5}$ basta dunque estrarre a meno di una unità la radice quadrata di 365, che è 19, e dividerla per 5; dunque la radice quadrata di $\frac{73}{5}$ a meno di $\frac{1}{5}$ è $\frac{19}{5}$.

256. Talune volte, per rendere il denominatore di una frazione un quadrato perfetto, si può adoprare un moltiplicatore minore del suo denominatore. Infatti (233), perchè un numero sia un quadrato perfetto, basta che tutti i suoi fattori primi abbiano esponenti pari; quindi, per rendere un numero quadrato perfetto, basterà moltiplicarlo pel prodotto di tutti i fattori primi che contiene con esponenti impari.

Abbiasi, per esempio, la frazione $\frac{1275}{300}$ o $\frac{1275}{3\times2^2\times5^2}$; per rendere il suo denominatore un quadrato perfetto, basta moltiplicare i suoi due termini per 3; e allora diventa $\frac{3\times1275}{3^2\times2^2\times5^2}$ o $\frac{3825}{30^2}$; la radice quadrata di 3825 a meno di un' unità è 61, e per conseguenza quella di $\frac{3825}{30^2}$ a meno di $\frac{1}{30}$ è $\frac{61}{30}$.

Valutazione in decimali della radice quadrata di un numero intero o frazionario.

257*. Consideriamo un numero N intero o frazionario, e supponiamo che si voglia valutare $\sqrt{N}$ a meno di $\frac{1}{10^n}$. Secondo la regola precedente, bisogna: 1° moltiplicare N pel quadrato di 10^n, che è 10^{2n}; 2° estrarre a meno di un' unità la radice quadrata del prodotto; 3° dividere il resultato per 10^n. Questa regola può essere enunciata in due modi diversi relativi all' ipotesi di N intero o frazionario.

1°. *Per estrarre, a meno di* $\frac{1}{10^n}$, *la radice quadrata di un numero intero* N, *si scrivono* 2n *zeri alla destra di* N, *si estrae, a meno di un' unità, la radice quadrata del numero così formato, e si separano* n *cifre decimali alla destra del risultato.*

2°. *Per estrarre, a meno di* $\frac{1}{10^n}$, *la radice quadrata di un numero frazionario, si valuta questo numero a meno di* $\frac{1}{10^{2n}}$, *si sopprime la virgola, poi si estrae, a meno di un' unità, la radice quadrata dell' intero così ottenuto, e si separano* n *cifre decimali alla sua destra.*

Esempi. 1°. Valutare $\sqrt{2}$ a meno di $\frac{1}{10^4}$ o di 0,0001.

I valori a meno di un' unità di $\sqrt{200000000}$ sono 14142 e 14143; quindi 1,4142 e 1,4143 sono i valori di $\sqrt{2}$ a meno di 0,0001, il primo per difetto, il secondo per eccesso.

2°. Valutare $\sqrt{\frac{5}{7}}$ a meno di $\frac{1}{10^3}$ o di 0,001. Il valore di $\frac{5}{7}$ in decimali, a meno di $\frac{1}{10^6}$, è 0,714285. I valori di $\sqrt{714285}$ a meno di un' unità, sono 845 e 846; per conseguenza, 0,845 e 0,846 sono i valori di $\sqrt{\frac{5}{7}}$ a meno di 0,001, il primo per difetto, il secondo per eccesso.

3°. Valutare $\sqrt{3,141}$ a meno di 0,001. Secondo la regola, bisogna esprimere 3,141 con 6 decimali, ciò che si farà scrivendo tre zeri alla destra di questo numero. Sopprimendo poi la virgola, si ha il numero 3141000. I valori di $\sqrt{3141000}$ a meno di un'unità sono 1772 e 1773; per conseguenza i valori di $\sqrt{3,141}$, a meno di 0,001, sono 1,772 e 1,773.

258. Osservazione. Da ciò che si è detto innanzi si vede che *per determinare la radice di un numero a meno di* $\frac{1}{10^n}$, *basta conoscere le* 2n *prime cifre decimali del suo valore in decimali;* quindi, se un numero ha più di $2n$ cifre decimali, basterà considerare le sole prime $2n$, e fare astrazione dalle altre.

Esempio. Debbasi estrarre a meno di $\frac{1}{10^2}$ la radice quadrata di 3,7157248932; basterà considerare le sole prime quattro cifre decimali, cioè basterà considerare il numero 3,7157. Sopprimendo la virgola, si ottiene 37157. I valori $\sqrt{37157}$ a meno di un'unità sono 193 e 194; per

conseguenza 1,93 e 1,94 son i valori di $\sqrt{3,7157248932}$ a meno di 0,01.

Valore approssimato della radice quadrata quando il grado di approssimazione non è fissato con precisione.

259. Ottenuto un valore approssimato della radice quadrata di un numero, si può fare uso di questo valore per dedurne un secondo anche più approssimato. Questo secondo può al modo stesso fornirne un terzo, quest' ultimo un quarto, e così di seguito indefinitamente. Ecco in che consiste questo metodo, che conduce rapidamente ad un valore molto approssimato.

Sia N il numero di cui si cerca la radice quadrata,
  a il valore approssimato della radice,
  x il numero piccolissimo che bisognerebbe aggiungere ad a per avere la radice esatta.

Essendo $a+x$ la radice di N, si avrà evidentemente

$$N=(a+x)^2=a^2+2ax+x^2.$$

x essendo per ipotesi piccolissimo, il suo quadrato è molto più piccolo; si può dunque, senza errore sensibile, trascurarlo e ridurre l'equazione precedente a

$$N=a^2+2ax;$$

per conseguenza $2ax$ è eguale ad $N-a^2$, e x a $\frac{N-a^2}{2a}$, in guisa che

$$a+\frac{N-a^2}{2a}$$

è il valore approssimato che si cercava. Questo valore può scriversi

$$a+\frac{N}{2a}-\frac{a}{2}=\frac{1}{2}\left(a+\frac{N}{a}\right).$$

Si ha dunque questo teorema: *Se* a *è un valore approssimato di* $\sqrt{N}$, $\frac{1}{2}\left(a+\frac{N}{a}\right)$ *è un secondo valore più approssimato del primo.*

OSSERVAZIONE. Il valore di x trovato innanzi è maggiore del valore esatto, perchè l'equazione $N=a^2+2ax$, dalla quale si è dedotto, differisce dall'equazione esatta $N=a^2+2ax+x^2$, per la soppressione di x^2 nel secondo membro di quest' ultima.

260. Se poniamo $\frac{1}{2}\left(a+\frac{N}{a}\right)=b$, b sarà un valore approssimato di $\sqrt{N}$, sul quale potremo ragionare come abbiamo fatto sopra a, avvertendo solamente di rappresentare il valore esatto di $\sqrt{N}$ con $b-x$, poichè $b>\sqrt{N}$; avremo

$$N=(b-x)^2=b^2-2bx+x^2,$$

ovvero, tralasciando x^2,

$$N=b^2-2bx,$$

da cui si conchiude

$$x=\frac{b^2-N}{2b},$$

e il nuovo valore approssimato della radice è

$$b-\frac{b^2-N}{2b}=b-\frac{b}{2}+\frac{N}{2b}=\frac{1}{2}\left(b+\frac{N}{b}\right).$$

Questo terzo valore, che indicheremo con c, sarà maggiore del valore esatto, come è facile assicurarsene.

Si potrà continuare indefinitamente, e si otterrà una serie di valori tutti maggiori di $\sqrt{N}$, e che si avvicineranno con molta rapidità al valore esatto.

Approssimazione che si può ottenere allorchè il numero sopra il quale si opera non è conosciuto con precisione.

261. Quando il valore di un numero N non è conosciuto esattamente, si concepisce che vi ha un limite al grado di approssimazione che può ottenersi nella radice quadrata. Sapendo, per esempio, che N è compreso fra A e B, ne risulta solamente che $\sqrt{N}$ è compresa tra $\sqrt{A}$ e $\sqrt{B}$, e non si potrà con alcun mezzo assegnare il suo valore con una maggiore approssimazione. Si dovrà dunque prendere indifferentemente per $\sqrt{N}$ un numero qualunque compreso tra questi due limiti. Se per valore di $\sqrt{N}$ si sceglie la semisomma di $\sqrt{A}$ e di $\sqrt{B}$, si può affermare che l'errore in più o in meno, è minore di $\frac{1}{2}(\sqrt{B}-\sqrt{A})$. È impossibile avere una maggiore approssimazione. Questo limite dell'approssimazione che si può raggiungere, $\frac{1}{2}(\sqrt{B}-\sqrt{A})$, può porsi sotto una forma che rende più agevole il calcolo del suo valore approssimativo.

Si ha

$$\sqrt{B}-\sqrt{A}=\frac{(\sqrt{B}-\sqrt{A})(\sqrt{B}+\sqrt{A})}{\sqrt{B}+\sqrt{A}};$$

ora

$$(\sqrt{B}-\sqrt{A})(\sqrt{B}+\sqrt{A})=B-A;$$

dunque

$$\frac{1}{2}(\sqrt{B}-\sqrt{A})=\frac{1}{2}\,\frac{B-A}{\sqrt{B}+\sqrt{A}}.$$

$\sqrt{B}$ e $\sqrt{A}$ differendo poco l'uno dall'altra, si può supporle eguali, e si ha approssimativamente

$$\frac{B-A}{4\sqrt{A}}.$$

per limite minore del grado di approssimazione col quale si può calcolare la radice quadrata di un numero N, quando si conosce solamente che questo numero è compreso fra B e A.

Esempio. *Riducendo un numero in decimali, si sono trovate per prime cifre 45,54. Le cifre seguenti non sono conosciute. Con quale approssimazione si può ottenere la sua radice quadrata?*

Il numero di cui si tratta è compreso fra 45, 54 e 45, 55 che rappresentano qui i limiti indicati precedentemente con B ed A. La differenza $B-A$ è 0, 01; dunque il limite minore del grado di approssimazione possibile è:

$$\frac{0,01}{4\sqrt{45,54}}.$$

$\sqrt{45,54}$ essendo maggiore di 6, questa frazione è minore del ventiquattresimo di 0, 01; sarà dunque possibile ottenere la radice cercata con un errore minore di $\frac{1}{2400}$.

Applicando la regola generale (254) si sarebbe creduto che non poteva ottenersi un' approssimazione maggiore di $\frac{1}{10}$, poichè del numero dato si conoscono due sole cifre decimali.

Esercizi.

I. Qualunque quadrato impari diviso per 8 dà per resto 1.

II. La radice di $\frac{n-1}{n}$ a meno di $\frac{1}{n}$ è $\frac{n-1}{n}$; è questo il solo numero che sia eguale alla sua radice a meno di $\frac{1}{n}$?

III. Se un numero pari è la somma di due quadrati, la sua metà è egualmente la somma di due quadrati.

IV. Se a e b sono numeri primi fra loro, uno pari e l'altro impari, la differenza dei loro quadrati non può essere un quadrato che se $a+b$ e $a-b$ sono essi pure quadrati.

V. Dedurre dal teorema precedente che i quadrati eguali alla somma di due altri sono tutti dati dalla formula

$$\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{x^2-y^2}{2}\right)^2 + (xy)^2;$$

x e y indicando numeri interi qualunque.

VI. Se a, b, c sono tre numeri differenti, $a+b+c$ è minore di $\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}$.

VII. a, b, α, β essendo quattro numeri qualunque, $(a\alpha+b\beta)^2$ è minore di $(a^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2)$, l'eguaglianza è possibile in un caso: quale è questo caso?

VIII. Il valore di un diamante è proporzionale al quadrato del suo peso. Provare che dividendo il diamante in due pezzi, si diminuisce il valore e che questa diminuzione di valore è la maggiore possibile quando i due pezzi hanno lo stesso peso.

IX. Estendere la proposizione precedente al caso nel quale il diamante è rotto in un dato numero di pezzi: il valore totale di questi pezzi è il minimo possibile, quando essi hanno lo stesso peso.

X. Se un quadrato intero a^2 è eguale alla somma di due altri b^2+c^2, uno dei tre numeri a, b o c è divisibile per 5.

CAPITOLO XII.

TEORIA DEI CUBI E DELLE RADICI CUBICHE.

—

Teoremi relativi ai cubi.

262. Teorema I. *Il cubo della somma di due numeri si compone del cubo del primo, più tre volte il prodotto del secondo pel quadrato del primo, più tre volte li prodotto del primo pel quadrato del secondo, più il cubo del secondo.*

Siano a e b i numeri proposti. Formare il cubo della loro somma, significa moltiplicare $(a+b)^2$ per $(a+b)$; ora (226)

$$(a+b)^2 = a^2+2a\times b+b^2.$$

Per moltiplicare questa somma per $a+b$, bisogna moltiplicare le tre parti del moltiplicando per a, poi per b, e sommare i resultati: si ottiene

$$(a+b)^3 = a^3+2a^2\times b+b^2\times a+a^2\times b+2a\times b^2+b^3;$$

ovvero, osservando che

$$2a^2\times b+a^2\times b = 3a^2\times b;\quad b^2\times a+2a\times b^2 = 3b^2\times a,$$
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2\times b+3b^2\times a+b^3,$$

ciò che bisognava dimostrare.

Osservazione I^a. *Il cubo di un numero composto di diecine e di unità è uguale al cubo delle diecine, più tre volte il prodotto del quadrato delle diecine per le unità, più tre volte il prodotto delle diecine pel quadrato delle unità, più il cubo delle unità.*

Osservazione II. *La differenza dei cubi di due numeri interi consecutivi è uguale a tre volte il quadrato del più piccolo, più tre volte il più piccolo, più 1.* Se, infatti, s' indicano questi due numeri con a ed $a+1$, si ha, in virtù del teorema precedente,

$$(a+1)^3 = a^3+3a^2+3a+1;$$

togliendo dalle due parti a^3, si trova

$$(a+1)^3-a^3 = 3a^2+3a+1.$$

263. Teorema II. *Il cubo di un prodotto è uguale al prodotto dei cubi dei fattori.*

Abbiasi il prodotto $a\times b\times c$, si ha

$$(a\times b\times c)^3 = a\times b\times c\times a\times b\times c\times a\times b\times c,$$

ovvero, riunendo i fattori eguali,

$$(a\times b\times c)^3 = a^3\times b^3\times c^3;$$

ciò che bisognava dimostrare.

Osservazione. *Per elevare una potenza a cubo, basta triplicare l' esponente.*

Debbasi, per esempio, elevare a^4 a cubo; a^4 essendo il prodotto di quattro fattori eguali ad a, il suo cubo è evidentemente il prodotto di 12 fattori eguali ad a, cioè a^{12}.

264. Teorema III. *L' ultima cifra del cubo di un numero intero è uguale all' ultima cifra del cubo delle sue unità.*

Quando due numeri interi si moltiplicano l' uno per l' altro, la cifra delle unità del prodotto dipende solamente dall' ultima cifra di ciascun fattore; dunque, allorchè per elevare a cubo un numero, si moltiplicherà questo numero due volte per sè stesso, la cifra delle unità del risultato dipenderà solamente dall' ultima cifra di questo numero.

Osservazione. I cubi dei nove primi numeri interi sono 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729. Essi terminano tutti con cifre differenti; dunque basta conoscere l'ultima cifra del cubo di un numero per sapere con quale cifra termina questo numero. Se il cubo termina con 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, o 9, il numero stesso terminerà con 0, 1, 8, 7, 4, 5, 6, 3, 2, o 9.

265. Teorema IV. *Se il cubo di un numero intero è terminato da uno zero, il loro numero è divisibile per* 3.

Affinchè un cubo sia terminato da uno zero, bisogna (264) che lo sia il numero stesso. Questo numero si può rappresentare con $A \times 10^n$, A essendo un numero intero non terminato da uno zero, e n il numero degli zeri che lo seguono. Il cubo di questo numero, $A^3 \times 10^{3n}$, termina evidentemente con $3n$ zeri, cioè con un numero di zeri divisibile per 3; ciò che voleva dimostrarsi.

266. Teorema V. *La condizione necessaria e sufficiente affinchè un numero intero sia il cubo di un altro numero intero, è che tutti gli esponenti dei suoi fattori primi sieno divisibili per* 3.

1°. Questa condizione è necessaria, poichè per formare il cubo di un numero risoluto in fattori primi, basta (263) triplicare gli esponenti di questi fattori, i quali, in conseguenza di ciò, divengono divisibili per 3.

2°. Questa condizione è sufficiente, poichè supponendola sodisfatta e dividendo per 3 gli esponenti dei diversi fattori primi, si formerà un numero che inalzato a cubo, riprodurrà il primo.

Osservazione. Dal teorema precedente resulta che un numero intero che ammette un divisore primo p, senza essere divisibile per il suo cubo p^3, non può essere un cubo; giacchè se si risolvesse in fattori primi, l'esponente del fattore p sarebbe 1 o 2, e per conseguenza non divisibile per 3.

Per esempio, un cubo non può essere divisibile per 2 senza esserlo per 8, e per conseguenza per 4, per 3, senza esserlo per 27, e per conseguenza per 9.

267. Teorema VI. *Il cubo di una frazione non può essere un numero intero.*

Sia $\frac{a}{b}$ una frazione che supporremo ridotta alla sua più semplice espressione, il suo cubo è evidentemente $\frac{a^3}{b^3}$. Ora, a essendo primo con b, a^3 è primo con b^3; dunque è impossibile che $\frac{a^3}{b^3}$ sia intero.

Osservazione. a^3 essendo primo con b^3, $\frac{a^3}{b^3}$ è irriducibile, e come i suoi due termini sono evidentemente dei cubi, se ne conchiude che il cubo di una frazione essendo ridotto alla sua più semplice espressione, ha sempre per termini dei cubi.

Definizione della radice cubica.

268. Quando un numero A è il cubo di un altro numero B, si dice che B è la radice cubica di A, e si scrive così:

$$B=\sqrt[3]{A}.$$

Esempi. 8 essendo il cubo di 2, 2 è la radice cubica di 8.

$\frac{27}{125}$ essendo il cubo di $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{5}$ è la radice cubica di $\frac{27}{125}$; e si ha

$$2=\sqrt[3]{8}, \qquad \frac{3}{5}=\sqrt[3]{\frac{27}{125}}.$$

269. Qualunque numero che è il cubo di un numero intero o frazionario si dice un cubo perfetto.

Abbiamo veduto che se un numero intero non è il cubo di un numero intero, non può essere il cubo di una frazione; esso quindi non è un cubo perfetto. Similmente, una frazione irriducibile i cui due termini non sono cubi perfetti, non può essere un cubo perfetto (267).

Da ciò segue che la radice cubica di un numero N che non è cubo perfetto, non può esprimersi nè con un numero intero, nè con una frazione, e quindi è un numero incommensurabile (238). Ora, queste radici cubiche hanno bisogno di una nuova definizione, poichè quella che abbiamo già data (268) non vi si può evidentemente applicare.

La radice cubica di un numero N che non è cubo perfetto, si definisce dicendo che *è un numero incommensurabile maggiore dei numeri i cui cubi sono inferiori ad* N *e minore dei numeri i cui cubi sono superiori ad* N. È facile vedere che $\sqrt[3]{N}$ è effettivamente un numero, cioè può esprimere la misura di una grandezza. Consideriamo, per esempio, il cammino percorso da un mobile che parte da un punto di una linea retta indefinita e si muove su questa retta sempre nello stesso senso. Il cammino di cui si tratta crescerà in un modo *continuo* a cominciare da zero; il cubo del numero che lo misura, prima minore di N, finirà per divenire più grande di N. Si concepisce che in un certo istante il cammino percorso sarà maggiore di tutte le lunghezze misurate dai numeri i cui cubi sono più piccoli di N, e minore delle lunghezze misurate dai numeri i cui cubi sono più grandi di N; in questo istante, il cammino percorso dal mobile sarà misurato da $\sqrt[3]{N}$.

270. L'operazione mediante la quale si determina

la radice cubica di un numero è detta *estrazione della radice cubica.*

La questione che ci proponiamo di risolvere può enunciarsi nel seguente modo:

Essendo dato un numero N *intero o frazionario, estrarre la sua radice cubica esattamente se* N *è un cubo perfetto, e con una data approssimazione nel caso contrario.*

Radice cubica di un numero a meno di una unità.

271. La radice cubica a meno di un'unità, è il maggior numero intero che sia contenuto nella sua radice cubica; essa è per conseguenza la radice del più gran cubo intero contenuto in questo numero.

272. Teorema I. *La radice cubica a meno di una unità di un numero che non è intero, è la stessa di quella della sua parte intera.*

Se, infatti, un numero è compreso tra due interi consecutivi N ed $N+1$, il più gran cubo intero che vi sia contenuto, è il più gran cubo intero inferiore od eguale ad N; esso è dunque il più gran cubo contenuto in N.

Esempio. $\frac{7832}{12}$ essendo eguale a $669\frac{5}{12}$, la sua radice cubica, a meno di una unità, è la stessa di quella di 669.

273*. Teorema II. *Se un numero intero ha* 3n, 3n—1, *o* 3n—2 *cifre, la sua radice cubica a meno di un'unità ha* n *cifre.*

Infatti, supponiamo di volere estrarre la radice cubica da un numero intero N di $3n$ cifre. Si ha (242) $N<10^{3n}$, $N\overline{\geq}10^{3n-1}$, e a più forte ragione $N\overline{\geq}10^{3n-3}$; quindi

$$\sqrt[3]{N}<10^{n}, \quad \sqrt[3]{N}\overline{\geq}10^{n-1}.$$

Dunque il numero delle cifre di $\sqrt[3]{N}$ è n (242).

Se N ha $3n-1$ cifre, avremo

$$N \overline{\gtrless} 10^{3n-2}, \qquad N < 10^{3n-1},$$

e a più forte ragione

$$N \overline{\gtrless} 10^{3n-3}, \qquad N < 10^{3n};$$

quindi

$$\sqrt[3]{N} \overline{\gtrless} 10^{n-1}, \qquad \sqrt[3]{N} < 10^{n}.$$

Allo stesso risultato si giungerebbe se N avesse $3n-2$ cifre; dunque il numero delle cifre della radice cubica di N è n in tutti e tre i casi.

Esempio. Se un numero ha 10 cifre, la sua radice cubica ne ha 4, perchè 10 è eguale a $3 \times 4-2$. Se ne ha 20, la sua radice ne ha 7, perchè 20 è eguale a $3 \times 7-1$.

274. Per estrarre la radice cubica dai numeri interi, è essenziale conoscere i cubi dei 9 primi numeri; questi cubi sono: 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729.

La conoscenza di questi cubi permetterà di dire alla sola ispezione di un numero minore di 1000, qual è la sua radice cubica a meno di un' unità.

Esempio. La radice cubica di 613 è 8, giacchè il più gran cubo intero che vi sia contenuto è 512.

Quando un numero è maggiore di 1000, la sua radice cubica a meno di una unità ha più di una cifra. Il metodo che si usa per trovarla, riposa sui due seguenti teoremi.

275. Teorema III. *La radice cubica di un numero maggiore di* 1000 *contiene precisamente tante diecine quante unità sono nella radice cubica del numero delle sue migliaia.*

Se indichiamo con x il numero delle diecine di $\sqrt[3]{N}$,

$\sqrt[3]{N}$ è compresa tra $x\times10$ ed $(x+1)\times10$; dunque N è compresa tra il cubo di $x\times10$ o $x^3\times10^3$ e il cubo di $(x+1)\times10$ o $(x+1)^3\times10^3$, cioè a dire tra $x^3\times1000$ e $(x+1)^3\times1000$. Per conseguenza il numero delle migliaia di N è compreso tra x^3 e $(x+1)^3$; o in altri termini, x^3 è il maggior cubo intero contenuto nelle migliaia di N, ed x è la radice di questo maggior cubo.

276. Osservazione. Il numero delle diecine contenute nella radice cubica di un numero intero, è, da ciò che precede, la radice cubica a meno di una unità del numero ottenuto sopprimendo le sue tre ultime cifre; il numero delle diecine contenute in questa nuova radice è, per la medesima ragione, la radice cubica del numero ottenuto sopprimendo tre nuove cifre; cancellando ancora tre cifre, la radice cubica del numero che resta sarà il numero delle diecine contenute nelle diecine di diecine, e così di seguito. Ma le diecine di diecine sono centinaia, le diecine di centinaia sono migliaia ec.; per conseguenza:

Il numero delle diecine contenute nella radice cubica di un numero intero, è la radice cubica del numero che si ottiene sopprimendo le sue ultime tre cifre.

Il numero delle centinaia contenute nella radice cubica di un numero intero, è la radice cubica del numero che si ottiene sopprimendo le sue ultime sei cifre.

Il numero delle migliaia contenute nella radice cubica di un numero intero, è la radice cubica del numero che si ottiene sopprimendo le sue ultime nove cifre, ec.

277. Teorema IV. *Togliendo da un numero intero il cubo delle diecine della sua radice, e dividendo il numero delle centinaia del resto pel triplo quadrato del numero delle diecine della radice, si ottiene un quoziente superiore o eguale alla cifra delle sue unità.*

Supponiamo, per esempio, che la radice cubica di N contenga a diecine e b unità. La parte intera di $\sqrt[3]{N}$ è $a\times10+b$; per conseguenza, N è almeno eguale ad $(a\times10+b)^3$, cioè almeno eguale ad $a^3\times1000+3a^2\times100\times b+3a\times10\times b^2+b^3$. Se dunque si toglie da N il cubo delle diecine della sua radice, cioè $a^3\times1000$, il resto $N-a^3\times1000$, che indicheremo con R, sarà almeno eguale a

$$3a^2\times100\times b+3a\times10\times b^2+b^3,$$

e conterrà almeno $3a^2\times b$ centinaia. Da ciò segue che dividendo per $3a^2$ il numero delle centinaia di R, si troverà un quoziente eguale o superiore a b.

278. Osservazione. Per determinare il valore esatto della cifra delle unità, bisogna provare successivamente il limite dato dal teorema precedente, se è minore di dieci, e i numeri di una cifra che gli sono inferiori. Queste prove consistono nel formare il cubo della radice presunta: se questo cubo è contenuto nel numero proposto, la cifra provata è esatta; altrimenti bisogna diminuirla.

Regola generale per l'estrazione della radice cubica.

279. I teoremi precedenti riducono l'estrazione della radice cubica di un numero intero a quella di un numero che ha tre cifre di meno. Mediante lo stesso metodo, l'estrazione della radice di questo numero si ridurrà a quella di un altro numero ancora più semplice, e così di seguito, sino a che si pervenga ad un numero di una, due o tre cifre di cui (274) si scorgerà immediatamente la radice.

Si ha quindi la regola seguente.

1°. *Per estrarre a meno di un' unità la radice cu-*

bica di un numero intero, si divide in classi di tre cifre cominciando dalla destra: il numero di queste classi, di cui l'ultima può contenere solamente una o due cifre, è eguale a quello delle cifre della radice.

Se infatti vi sono n classi, il numero proposto ha $3n$ o $3n-1$ o $3n-2$ cifre, e allora la sua radice cubica (273) ha n cifre.

2°. *La prima cifra della radice è la radice cubica a meno di un'unità del numero espresso dall'ultima classe.*

Consideriamo, per esempio, il numero 83117451342, al quale riferiremo, per fissare le idee, tutte le spiegazioni che seguiranno. Il numero delle diecine della sua radice cubica è (275) la radice cubica a meno di una unità di 83117451; il numero delle sue centinaia è (276) la radice cubica, a meno di una unità di 83117, e il numero delle sue migliaia (276) è la radice cubica a meno di una unità di 83. Ora, 83 è precisamente la prima classe a sinistra del numero proposto; dunque la seconda parte della regola è dimostrata, e la radice cubica di 83, cioè 4, è la prima cifra della radice cercata.

3°. *Dopo avere ottenuto questa prima cifra, se ne forma il cubo e si toglie dal numero espresso dalla prima classe; a destra del resto si scrivono le tre cifre che formano la seconda classe, e si divide il numero delle centinaia del numero* R *così ottenuto pel triplo quadrato della prima cifra della radice. Il quoziente è uguale o superiore alla seconda cifra.*

Il numero delle centinaia contenute nella radice è infatti la radice cubica a meno di una unità di 83117. Per trovare il numero di queste centinaia, cioè le due prime cifre della radice cercata, basta dunque estrarre la radice cubica di 83117, di cui già si conosce la cifra delle diecine 4. A quest'effetto si toglierà da 83117 il

cubo delle 4 diecine della sua radice, e dividendo le centinaia del resto pel triplo quadrato di 4, si otterrà la cifra delle unità, o una cifra maggiore.

Il cubo di 4 diecine è 64000, che tolte da 83117 lasciano per resto 19117. Dividendo 191 per 48, triplo quadrato di 4, il quoziente è 3. Dunque la cifra delle unità della radice di 83117, cioè la seconda cifra della radice cercata, non può superare 3.

4°. *Si determina il valore esatto di questa seconda cifra, provando successivamente il quoziente trovato, se è minore di 10, e i numeri di una cifra che gli sono inferiori; a questo effetto, si scrive la cifra da provare alla destra della prima cifra della radice; si fa il cubo del numero così ottenuto; se questo cubo può togliersi dal numero formato dalle due prime classi, la cifra provata è esatta, altrimenti bisogna provare la cifra inferiore di una unità.*

Poichè la radice cubica di 83117 è tutt' al più eguale a 43, se si verifica infatti che 43 non è maggiore di questa radice, le sarà evidentemente eguale. Ora si fa questo per l' appunto quando si forma il cubo di 43 e si vede se può togliersi da 83117.

Il cubo di 43 è 79507, che tolto da 83117, dà per resto 3610. La cifra 3 è dunque esatta.

5°. *Alla destra del resto così ottenuto, si scrivono le tre cifre della terza classe, e si dividono le centinaia del numero così formato pel triplo quadrato del l' insieme delle due prime cifre della radice: il quoziente è maggiore della terza cifra o uguale ad essa.*

Il numero delle diecine contenute nella radice è, infatti (276), la radice cubica a meno di una unità di 83117451. Per trovare questo numero di diecine, cioè le tre prime cifre della radice, basta dunque estrarre la radice cubica di 83117451, di cui già si conosce il

numero delle diecine 43. A quest' effetto, si toglierà da 83117451 il cubo delle 43 diecine della sua radice, e dividendo le centinaia del resto pel triplo quadrato di queste diecine, si otterrà (277) per quoziente la cifra delle unità, o una cifra maggiore.

L'eccesso di 83117451 sul cubo delle 43 diecine è 3610451: dividendo 36104 per 5547 triplo quadrato di 43, si ottiene 6 per quoziente. La terza cifra della radice è $\leqq 6$.

6°. *Il valore esatto di questa terza cifra si determina provando successivamente il quoziente trovato se è minore di* 10, *e i numeri di una cifra che gli sono inferiori. Per quest' oggetto, si scrive la cifra da provare alla destra del numero formato dall' insieme delle due prime cifre della radice, e si forma il cubo del numero così ottenuto. Se questo cubo può togliersi dal numero formato dall' insieme delle tre prime classi, la cifra provata è esatta, altrimenti bisogna diminuirla di una unità e provarla di nuovo.*

Infatti, la radice cubica a meno di un' unità di 83117451, essendo, in conseguenza di ciò che si è detto innanzi, tutto al più eguale a 436, se verifichiamo che 436 non è maggiore di questa radice, le sarà necessariamente eguale. Ora, quando si forma il cubo di 436, e si vede se può togliersi da 83117451, si fa per l'appunto questa verificazione.

Il cubo di 436 è 82882186, che può togliersi da 83117451; il resto è 235595.

La cifra 6 è dunque esatta.

7°. *Trovata la terza cifra, un processo affatto simile fornisce la quarta, la quinta* ec.

Ciò non ha bisogno di spiegazione. Nel caso attuale, per determinare la quarta cifra della radice, alla destra del resto 235595, si scriverà la classe seguen-

te 342, si formerà il numero 235595342, e si dividerà il numero delle sue centinaia 2355953 pel triplo quadrato di 436 che è 570288: il quoziente è 4, e per conseguenza (277) l' ultima cifra della radice non può essere maggiore di 4. Il cubo di 4364 è 83110180544 che può togliersi da 83117451342, e lascia per resto 7270798; la cifra 4 è dunque esatta; la radice cubica di 83117451342 è per conseguenza 4364, e il resto 7270798; si ha quindi

$$83117451342 = (4364)^3 + 7270798,$$

resultato facile a verificare.

280. I calcoli si dispongono ordinariamente nel modo seguente

83, 117, 451, 342	4364
19 117	48
3 610 451	5547
235 595 342	570288
7 270 798	

Oltre i calcoli indicati, è stato necessario formare successivamente il cubo di 43, quello di 436 e quello di 4364. Questi calcoli si fanno a parte, e non si scrive che il resultato delle sottrazioni che ci fanno conoscere se le cifre trovate sono esatte.

281. Osservazione I. Se il resto unito alla prima cifra della classe seguente non è divisibile per il triplo quadrato delle cifre ottenute nella radice, si scriverà zero nella radice, e si abbasserà l' altra coppia.

282. Osservazione II. Tutte le volte che si è sicuri che una cifra della radice non dev' essere minore, si potrà agevolmente verificare se può esser maggiore mediante il seguente

Teorema. *Il resto ottenuto nell' estrazione di una*

radice cubica, non può mai superare il triplo quadrato della radice, più il triplo della radice.

Sieno, infatti, N un numero intero, R la sua radice cubica a meno di un'unità; il resto dell'operazione è $N-R^3$. Questa differenza è minore di $3R^2+3R+1$, giacchè altrimenti N sarebbe almeno eguale ad R^3+3R^2+3R+1, cioè ad $(R+1)^3$, e la sua radice sarebbe almeno eguale ad $R+1$.

283*. Osservazione III. Il metodo che abbiamo esposto per l'estrazione della radice cubica di un numero mostra che, per ogni nuova cifra della radice, bisogna formare il cubo del numero ottenuto e il triplo quadrato di esso; in guisa che l'operazione riesce tanto più penosa quanto più si procede innanzi. Non sarà quindi inutile dire come i calcoli si possono rendere di gran lunga più facili. Sia a il numero già ottenuto nella radice, e b la nuova cifra trovata; i due numeri che bisognano per proseguire l'operazione sono $(10a+b)^3$ e $3(10a+b)^2$. Il calcolo si disporrà nel modo seguente:

$$\begin{array}{rrr}
10^3 . a^3, & 10^2 . 3a^2, & 10 . 3a,\ 1 \\
+10^2 . 3a^2b, & +10\ . 3ab, & b \\
+10\ . 3ab^2, & +b^2, & \\
+b^3, & & \\
 & +10\ . 3ab, & \\
 & +2b^2, & 2b \\
\hline
(10a+b)^3, & 3(10a+b)^2, & 3(10a+b),\ 1
\end{array}$$

La prima linea contiene i termini del cubo $(10a+1)^3$ che sono già conosciuti; la seconda linea si ottiene moltiplicando per b i termini della prima linea (escluso il primo), e per comodo di calcolo si scrivono i termini di un posto più innanzi verso la sinistra; nel modo stesso si ottiene la terza linea e poi la quarta. In seguito alla seconda

colonna si aggiunge il secondo termine e il doppio del terzo; in fine alla terza colonna si aggiunge il doppio del secondo termine. Sommando i termini che si corrispondono in colonna verticale, si hanno i numeri che servono per il calcolo di un'altra cifra.

Esempio. Vogliasi estrarre la radice cubica dal numero 98841703094039. Il calcolo si disporrà come qui sotto:

98, 841, 703, 094, 039	46235
34 8	48
1 505 7	6348
230 575 0	640332
38 350 727 0	64116387
6 289 066 164	

Il calcolo dei cubi di 46, 462, ec., e i tripli quadrati degli stessi numeri, si calcoleranno nel modo che qui appresso si vede.

64000	4800	120	1
28800	720	6	
4320	36		
216			
	720		
	72	12	
97336000	634800	1380	1
1269600	2760	2	
5520	4		
8			
	2760		
	8	4	
98611128000	64033200	13860	1
192099600	41580	3	
124740	9		
27			
	41580		
	18	6	
98803352367000	6411638700	138690	1
32058193500	693450	5	
3467250	25		
125			
	693450		
	50	10	
98835414027875	6413025675	138705	1

Se vi fossero altre cifre il calcolo continuerebbe al modo stesso senza aumento di difficoltà.

284'. La ricerca della radice cubica di un numero a meno di un' unità può abbreviarsi in virtù del seguente

TEOREMA. *Se* N *indica un numero intero la cui radice cubica ha almeno* 2n+2 *cifre; se inoltre*, a *indica il numero formato dalle* n+2 *prime cifre di* $\sqrt[3]{N}$ *seguite da* n *zeri, e* q *il quoziente intero della divisione di* $N-a^3$ *per* $3a^2$, *si avrà*

$$\sqrt[3]{N}=a+q.$$

esattamente o a meno di un' unità.

Indichiamo con x il numero generalmente incommensurabile che bisogna aggiungere ad a per avere il valore esatto di $\sqrt[3]{N}$; si avrà $N=(a+x)^3$, e quindi

$$N=a^3+3a^2x+3ax^2+x^3,$$

da cui

$$\frac{N-a^3}{3a^2}=x+\frac{x^2}{a}+\frac{x^3}{3a^2}.$$

Sia r il resto della divisione di $N-a^3$ per $3a^2$, avremo $\frac{N-a^3}{3a^2}=q+\frac{r}{3a^2}$, e per conseguenza

$$x+\frac{x^2}{a}+\frac{x^3}{3a^2}=q+\frac{r}{3a^2};$$

e togliendo dalle due parti $\frac{x^2}{a}+\frac{x^3}{3a^2}$,

$$x=q+\frac{r}{3a^2}-\left(\frac{x^2}{a}+\frac{x^3}{3a^2}\right).$$

Poichè la parte intera di x ha n cifre, x è minore di 10^n, e per conseguenza $x^2<10^{2n}$, $x^3<10^{3n}$, ma per

ipotesi a contiene almeno $2n+2$ cifre, dunque $a > 10^{2n+1}$. Da ciò risulta che

$$\frac{x^2}{a}+\frac{x^3}{3a^2}<\frac{10^{2n}}{10^{2n+1}}+\frac{10^{3n}}{3.10^{4n+2}}<\frac{1}{10}+\frac{1}{10^{n+2}},$$

e quindi

$$\frac{x^2}{a}+\frac{x^3}{3a^2}<\frac{10^{n+1}+1}{10^{n+2}}.$$

Ma quest' ultima frazione è evidentemente minore dell' unità, dunque l' errore che si commette prendendo $\sqrt[3]{N}=a+q$ è minore di un' unità, perchè la quantità che si trascura $\frac{r}{3a}-\left(\frac{3ax^2+x^3}{3a^2}\right)<1$.

Le due eguaglianze

$$(a+q)^3=a^3+3a^2q+3aq^2+q^3,$$
$$N=a^3+3a^2q+r,$$

mostrano che se $r>3aq^2+q^3$, $a+q$ è il valore approssimato di $\sqrt[3]{N}$ per difetto; se $r<3aq^2+q^3$, questo valore è approssimato per eccesso; finalmente se $r=3aq^2+q^3$, $a+q$ sarà il valore esatto di $\sqrt[3]{N}$.

Calcolo delle radici cubiche ad una data approssimazione.

285. Le radici dei numeri che non sono cubi perfetti possono determinarsi con quella approssimazione che si vuole. Infatti, un numero N qualunque può sempre porsi sotto la forma $\frac{N\times n^3}{n^3}$; quindi avremo

$$\sqrt[3]{N}=\frac{\sqrt[3]{N\times n^3}}{n}.$$

Estraendo la radice cubica a meno di una unità dal prodotto $N \times n^3$, supponiamo che siasi trovato il numero m; è chiaro che $\sqrt[3]{N \times n^3}$ sarà compresa fra m ed $m+1$; quindi evidentemente $\sqrt[3]{N}$ sarà compresa fra $\frac{m}{n}$ ed $\frac{m+1}{n}$, e l'errore che si commette nel prendere l'uno o l'altro di questi due valori differisce dal vero per meno di $\frac{1}{n}$.

Possiamo quindi enunciare la regola seguente:

Per estrarre la radice cubica dal numero N *a meno di un numero dato* $\frac{1}{\mathrm{n}}$, *bisogna estrarre a meno di una unità la radice cubica dal prodotto* $\mathrm{N} \times \mathrm{n}^3$ *e dividere il risultato per* n.

Esempio. Debbasi estrarre la radice cubica da $\frac{73}{5}$ a meno di $\frac{1}{7}$. Moltiplichiamo $\frac{73}{5}$ per 343 cubo di 7, il prodotto è $\frac{73 \times 343}{5}$, cioè $\frac{25039}{5}$ o $5007\,\frac{4}{5}$, la sua radice cubica a meno di una unità, che è la stessa di quella di 5007 (272), è 17, per conseguenza la radice cubica di $\frac{73}{5}$ a meno di $\frac{1}{7}$ è $17 \times \frac{1}{7}$ o $\frac{17}{7}$.

286. Osservazione. Quando il denominatore di una frazione è un cubo perfetto b^3, per ottenere la sua radice cubica a meno di $\frac{1}{b}$, basta estrarre la radice cubica dal numeratore a meno di una unità e dividerla per b. Infatti, per estrarre la radice cubica da $\frac{a}{b^3}$ a meno di $\frac{1}{b}$, bisogna moltiplicare $\frac{a}{b^3}$ per b^3, estrarre la radice cubica dal prodotto a a meno di una unità, e dividere il risul-

tato per b. La quale operazione è affatto identica a quella che abbiamo indicata.

Per estrarre la radice cubica da una frazione quando il grado di approssimazione non è stato fissato, si comincia spesso per rendere il suo denominatore un cubo perfetto, e si fa uso allora dell'osservazione precedente. Per ottenere ciò basta moltiplicare i due termini di questa frazione pel quadrato del denominatore.

Esempio. Debbasi estrarre la radice cubica da $\frac{73}{5}$; questa frazione è uguale a $\frac{73\times5^2}{5^3}=\frac{1825}{125}$; per avere la sua radice cubica a meno di $\frac{1}{5}$, basta dunque estrarre la radice cubica a meno di una unità di 1825, che è 12, e dividerla per 5; la radice cubica di $\frac{73}{5}$ a meno di $\frac{1}{5}$ è quindi $\frac{12}{5}$.

Talvolta, per rendere il denominatore di una frazione un cubo perfetto, si può fare uso di un moltiplicatore minore del quadrato del suo denominatore: basta, infatti, che tutti i suoi fattori primi acquistino esponenti divisibili per 3, e ciò avverrà evidentemente se si moltiplica il denominatore pel prodotto di tutti quelli fra i suoi fattori primi il cui esponente è della forma $3n+2$, e pel quadrato di quelli il cui esponente è della forma $3n+1$.

Abbiasi per esempio la frazione $\frac{197}{360}=\frac{197}{2^3\times3^2\times5}$. Per rendere il suo denominatore un cubo perfetto si moltiplicheranno i suoi due termini per 3×5^2, e diverrà $\frac{197\times3\times5^2}{2^3\times3^3\times5^3}=\frac{14775}{(30)^3}$. Per avere la sua radice cubica a meno di $\frac{1}{30}$, basta estrarre la radice cubica a

meno di un'unità da 14775, che è 24, e dividerla per 30; dunque la radice cubica di $\frac{197}{360}$ a meno di $\frac{1}{30}$ è $\frac{24}{30}$.

Valutazione in decimali della radice cubica di un numero intero o frazionario.

287*. Consideriamo un numero N intero o frazionario, e supponiamo che si voglia valutare $\sqrt[3]{N}$ a meno di $\frac{1}{10^n}$. Secondo la regola precedente, bisogna: 1° moltiplicare N pel cubo di 10^n, che è 10^{3n}; 2° estrarre a meno di una unità la radice cubica dal prodotto; 3° dividere il resultato per 10^n. Questa regola può essere enunciata in due modi diversi relativi all'ipotesi di N intero o frazionario.

1°. *Per estrarre a meno di* $\frac{1}{10^n}$ *la radice cubica da un numero intero* N, *si scrivono* 3n *zeri alla destra di* N, *si estrae a meno di un' unità la radice cubica dal numero così formato, e si separano* n *cifre decimali alla destra del resultato.*

2°. *Per estrarre a meno di* $\frac{1}{10^n}$ *la radice cubica da un numero frazionario, si valuta questo numero a meno di* $\frac{1}{10^{3n}}$; *si sopprime la virgola, poi si estrae a meno di un' unità la radice cubica dall' intero così ottenuto, e si separano* n *cifre decimali alla destra del resultato.*

Esempio 1°. Valutare $\sqrt[3]{2}$ a meno di $\frac{1}{10^2}$ o di 0,01. I valori di $\sqrt[3]{2000000}$ a meno di una unità, sono 125 e 126; e quindi 1,25 e 1,26 sono i valori di $\sqrt[3]{2}$ a meno di 0,01, il primo per difetto, il secondo per eccesso.

2°. Valutare $\sqrt[3]{\frac{5}{7}}$ a meno di $\frac{1}{10^3}$ o di 0,001. Il valore di $\frac{5}{7}$ a meno di $\frac{1}{10^9}$ è 0,714285714. I valori di $\sqrt[3]{714285714}$ a meno di una unità sono 893 e 894; per conseguenza, 0,893 e 0,894 sono i valori di $\sqrt[3]{\frac{5}{7}}$ a meno di 0,001, il primo per difetto, il secondo per eccesso.

3°. Valutare $\sqrt[3]{3,14}$ a meno di 0,1. Secondo la regola bisogna esprimere 3,14 con 3 decimali; lo che si farà scrivendo uno zero alla destra di questo numero. Sopprimendo poscia la virgola, si ha il numero 3140. I valori di $\sqrt[3]{3140}$ a meno di una unità sono 14 e 15; per conseguenza, i valori di $\sqrt[3]{3,14}$ a meno di $\frac{1}{10}$ sono 1,4 e 1,0.

288. Osservazione. Da ciò che si è detto innanzi si vede che, *per determinare la radice di un numero a meno di* $\frac{1}{10^n}$, *basta conoscere le* 3n *prime cifre decimali del suo valore in decimali;* quindi se un numero ha più di $3n$ cifre decimali, basterà considerare le sole prime $3n$, e fare astrazione dalle altre.

Valore approssimato della radice cubica quando il grado di approssimazione non è fissato con precisione.

289. Nella maggior parte dei casi non importa conoscere la radice cubica di un numero a un dato grado di approssimazione, e si deve cercare solamente il mezzo di ottenerne valori di più in più approssimati.

Allora bisogna procedere nel seguente modo:

Sia N un numero ed a un valore approssimato della

sua radice cubica, che supponiamo ottenuta mediante un metodo qualunque; indichiamo con $a+x$ il valore esatto, avremo

$$N=(a+x)^3=a^3+3a^2x+3ax^2+x^3.$$

Trascurando nel secondo membro la parte $3ax^2+x^3$ come molto piccola, si avrà evidentemente

$$N>a^3+3a^2x;$$

togliendo dai due membri a^3 e dividendo tutto per $3a^2$, otterremo

$$\frac{N-a^3}{3a^2}>x.$$

Quindi adottando per radice

$$b=a+\frac{N-a^3}{3a^2},$$

b sarà un valore approssimato per eccesso.

Indichiamo con $b-y$, il valore esatto di $\sqrt[3]{N}$: si avrà

$$N=(b-y)^3=b^3-3b^2y+3by^2-y^3.$$

$3by^2$ essendo evidentemente maggiore di y^3, è chiaro che trascurando nel secondo membro $3by^2-y^3$, si otterrà l'ineguaglianza

$$N>b^3-3b^2y;$$

aggiungendo ai due membri $3b^2y-N$, avremo

$$3by^2>b^3-N, \text{ da cui } y>\frac{b^3-N}{3b^2}$$

Se dunque si adotta per radice

$$c=b-\frac{b^3-N}{3b^2},$$

si avrà un nuovo valore di $\sqrt[3]{N}$ approssimato per eccesso.

Si potrà continuare così indefinitamente, e si otterrà una serie di valori tutti maggiori di $\sqrt[3]{N}$, e che si avvicineranno al valore esatto con molta rapidità.

Approssimazione che si può ottenere allorchè il numero sopra il quale si opera non è conosciuto con precisione.

290*. Quando il valore di un numero N non è conosciuto con precisione assoluta, si capisce che vi ha un limite al grado di approssimazione che può ottenersi nella radice cubica. Sapendo, per esempio, che N è compresa fra A e B, ne risulta solamente che $\sqrt[3]{N}$ è compresa fra $\sqrt[3]{A}$ e $\sqrt[3]{B}$, e non si potrà con alcun mezzo assegnare il suo valore con maggiore approssimazione. Si dovrà dunque prendere indifferentemente per $\sqrt[3]{N}$ un numero qualunque compreso fra questi due limiti. Se per valore di $\sqrt[3]{N}$ si sceglie la semisomma di $\sqrt[3]{A}$ e di $\sqrt[3]{B}$, si può affermare che l'errore, in più o in meno, è minore di $\frac{1}{2}(\sqrt[3]{B}-\sqrt[3]{A})$. È impossibile raggiungere un'approssimazione maggiore. L'espressione $\frac{1}{2}(\sqrt[3]{B}-\sqrt[3]{A})$, può porsi sotto una forma che rende più agevole il calcolo del suo valore approsimato.

Moltiplichiamo e dividiamo per $(\sqrt[3]{B})^2+\sqrt[3]{B}\times\sqrt[3]{A}+(\sqrt[3]{A})^2$ la differenza $\sqrt[3]{B}-\sqrt[3]{A}$, si ha

$$\sqrt[3]{B}-\sqrt[3]{A}=\frac{[\sqrt[3]{B}-\sqrt[3]{A}][(\sqrt[3]{B})^2+\sqrt[3]{B}\sqrt[3]{A}+(\sqrt[3]{A})^2]}{(\sqrt[3]{B})^2+\sqrt[3]{B}\sqrt[3]{A}+(\sqrt[3]{A})^2};$$

ora

$$[\sqrt[3]{B}-\sqrt[3]{A}][(\sqrt[3]{B})^2+\sqrt[3]{B}\sqrt[3]{A}+(\sqrt[3]{A})^2]$$
$$=(\sqrt[3]{B})^3-(\sqrt[3]{A})^3=B-A;$$

quindi

$$\frac{1}{2}[\sqrt[3]{B}-\sqrt[3]{A}]=\frac{1}{2}\frac{B-A}{(\sqrt[3]{B})^2+\sqrt[3]{B}\sqrt[3]{A}+(\sqrt[3]{A})^2}.$$

$\sqrt[3]{B}$ e $\sqrt[3]{A}$ differendo poco l'una dall'altra, si può supporle eguali, e si ha approssimativamente

$$\frac{B-A}{6(\sqrt[3]{A})^2},$$

per limite minore del grado di approssimazione col quale si può calcolare la radice cubica di un numero N, quando si conoscono solamente due limiti B e A fra i quali esso è compreso.

Esercizi.

I. Trovare le condizioni alle quali deve soddisfare un numero intero dato affinchè possa essere la differenza di due cubi consecutivi, e trovare questi due cubi.

II. a e b indicando due numeri qualunque; $a^6+a^4b^2+a^2b^4+b^6$ è maggiore o minore del cubo di (a^2+b^2)?

III. La somma dei cubi dei primi numeri interi è eguale al quadrato della somma di questi numeri.

IV. Se due numeri interi, A e B, hanno lo stesso numero di cifre, e più della metà delle cifre a sinistra di comune, si ha

$$\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}<\frac{1}{3}.$$

V. Verificare l'eguaglianza

$$\sqrt[3]{28+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4.$$

VI. Calcolare il valore di

$$\frac{\sqrt[3]{5,12}+\sqrt[3]{0,03375}}{\sqrt[3]{80}-\sqrt[3]{0,01}}.$$

CAPITOLO XIII.

TEORIA DEI NUMERI INCOMMENSURABILI.

(Complemento dei due capitoli precedenti.)

—

Generalità sui numeri incommensurabili.

291. Se due grandezze sono multiple di una stessa terza grandezza, questa ultima è detta una *comune misura* delle due prime. Due grandezze sono *commensurabili* o *incommensurabili*, secondochè hanno o non hanno una comune misura. Se una grandezza ha una comune misura con l'unità, questa comune misura è uguale alla stessa unità o ad una parte aliquota dell'unità. Nel primo caso, la grandezza è misurata da un numero intero; nel secondo caso, è misurata da un numero frazionario. Reciprocamente, una grandezza misurata da un numero intero o da un numero frazionario è commensurabile con l'unità, giacchè essa è un multiplo dell'unità o di una sua parte aliquota.

292. Il numero che misura una grandezza incommensurabile con l'unità si definisce dicendo ch' *è un numero maggiore dei numeri che misurano le grandezze più piccole della grandezza data, e minore dei numeri che misurano le grandezze maggiori della grandezza data.*

Un numero è detto *commensurabile* o *razionale* se la grandezza di cui esprime la misura è commensurabile con l'unità; è detto incommensurabile o irrazionale nel caso contrario. Da ciò resulta che i numeri commensu-

rabili sono i numeri interi e i numeri frazionari. Dei numeri incommensurabili abbiamo veduto esempi nei due capitoli precedenti; giacchè abbiamo veduto che se un numero non è un quadrato o un cubo perfetto, la sua radice quadrata o cubica rappresenta una grandezza perfettamente determinata, che non ha comune misura con l' unità.

In questo capitolo ci proponiamo di estendere ai numeri incommensurabili le operazioni dell'aritmetica, sinora esposte esclusivamente riguardo ai numeri commensurabili.

Addizione e sottrazione dei numeri incommensurabili.

293. Aggiungere o sottrarre due numeri incommensurabili, significa trovare un numero che esprima la somma o la differenza delle grandezze rappresentate dai numeri proposti.

Moltiplicazione.

294. Se il moltiplicatore è commensurabile, non vi ha alcuna modificazione da apportare alla definizione.

Esempio. Il prodotto di $\sqrt{2}$ per 7, è un numero che esprime una grandezza 7 volte maggiore di quella che rappresenta $\sqrt{2}$. Il prodotto di $\sqrt{2}$ per $\frac{3}{4}$, è un numero esprimente una grandezza eguale ai tre quarti di quella rappresentata da $\sqrt{2}$.

Se il moltiplicatore è incommensurabile, è necessaria una nuova definizione. Chiameremo prodotto di un numero A per un numero incommensurabile B, un numero minore del prodotto di A per un numero commensurabile qualunque superiore a B, e maggiore del prodotto

di A per un numero commensurabile qualunque minore di B.

Divisione.

295. Dividere due numeri A e B l'uno per l'altro, significa trovare un terzo numero che moltiplicato pel divisore B, riproduca il dividendo A. Questa definizione si applica qualunque sieno i numeri A e B, commensurabili o incommensurabili.

Radici quadrate e cubiche.

296. La radice quadrata o cubica di un numero incommensurabile è un numero che, preso due o tre volte come fattore, dà un prodotto eguale al numero dato.

Osservazione. La sola operazione che richiede una definizione veramente nuova è quella della moltiplicazione: tutte le altre dipendono da essa.

Teoremi relativi ai numeri incommensurabili

297. Teorema I. *Si possono sempre trovare due numeri commensurabili aventi una differenza piccola quanto si vuole, e che comprendano tra essi un numero incommensurabile dato.*

Sia n un numero intero qualunque; se si considera la serie

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \frac{4}{n}, \frac{5}{n}, \text{ec.},$$

si vede che i suoi termini aumentano senza limite, e poichè cominciano da 0, il numero dato, qualunque sia, è necessariamente compreso tra due di essi, $\frac{x}{n}$ e $\frac{x+1}{n}$,

e si può prendere n abbastanza grande, perchè la loro differenza $\frac{1}{n}$ sia piccola quanto vuolsi.

298. OSSERVAZIONE I. In conseguenza del teorema precedente, ammetteremo come evidente che i teoremi seguenti, che sono stati dimostrati per numeri commensurabili qualunqne, si applicano anche a numeri incommensurabili.

1°. *In un prodotto di più fattori, si può mutare l'ordine dei fattori.*

2°. *Per moltiplicare un numero pel prodotto di più fattori, si può moltiplicarlo successivamente per questi diversi fattori.*

3°. *Per moltiplicare un prodotto per un numero, basta moltiplicare uno dei suoi fattori per questo numero.*

4°. *Per moltiplicare un prodotto per un altro prodotto, basta formare un prodotto unico coi fattori del moltiplicando e quelli del moltiplicatore.*

5°. *Per moltiplicare due potenze di uno stesso numero basta sommare gli esponenti.*

6°. *Per dividere due potenze di uno stesso numero, basta sottrarre dall'esponente del dividendo quello del divisore.*

7°. *Per elevare una potenza ad un'altra potenza, basta moltiplicare il primo esponente pel secondo.*

8°. *Per elevare un prodotto a una potenza, basta elevare ciascun fattore a questa potenza.*

9°. *I teoremi relativi al calcolo delle espressioni frazionarie della forma* $\frac{a}{b}$ (172), *si applicano al caso in cui* a *e* b *indicano numeri incommensurabili.*

OSSERVAZIONE II. I teoremi 7° e 8° sono stati dimostrati da noi nei due capitoli precedenti per la seconda

e la terza potenza solamente; ma la dimostrazione essendo affatto identica per qualunque altra potenza, faremo a meno di darla.

Calcolo dei radicali.

299. La radice m^{esima} di un numero N commensurabile o incommensurabile è il numero la cui potenza m^{esima} è uguale a N. Questa radice s' indica col simbolo $\sqrt[m]{}$, m si chiama *indice* o *grado* della radice.

Esempio. $\sqrt[5]{7}$ rappresenta la radice quinta di 7, o la radice di 7 il cui indice è 5.

Quando l' indice della radice è 2 si fa a meno di scriverlo.

Un numero intero che non è la potenza m^{esima} di un numero intero, non può essere la potenza m^{esima} di una frazione; quindi la sua radice m^{esima} è un numero incommensurabile. Accade lo stesso per la radice m^{esima} di una frazione irriducibile i cui termini non sono le potenze m^{esime} di due numeri interi.

300*. Teorema I. *La radice* m^{esima} *di un prodotto è uguale al prodotto delle radici* m^{esime} *dei fattori.*

Siano a, b, c, d numeri qualunque; bisogna provare che

$$\sqrt[m]{a\times b\times c\times d}=\sqrt[m]{a}\times\sqrt[m]{b}\times\sqrt[m]{c}\times\sqrt[m]{d}.$$

Per definizione, la potenza m^{esima} del primo membro è $a\times b\times c\times d$; quindi per provare che il secondo membro è uguale a $\sqrt[m]{a\times b\times c\times d}$, è sufficente far vedere che la sua potenza m^{esima} è $a\times b\times c\times d$. Ora, pel teore-

ma 8°, si ha

$$\left(\sqrt[m]{a}\times\sqrt[m]{b}\times\sqrt[m]{c}\times\sqrt[m]{d}\right)^m=\left(\sqrt[m]{a}\right)^m\times\left(\sqrt[m]{b}\right)^m\times\left(\sqrt[m]{c}\right)^m\times\left(\sqrt[m]{d}\right)^m$$
$$=a\times b\times c\times d.$$

Lo che dimostra la proposizione enunciata.

301. Osservazione I. *Il prodotto di più radicali del grado* m^esimo^ *è uguale alla radice* m^esima^ *del prodotto dei numeri posti sotto questi radicali.*

Questa osservazione permette di calcolare il prodotto di più radicali dello stesso indice.

Esempio. *Debbasi calcolare* $\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{5}$.

Si ha

$$\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{5}=\sqrt{30},$$

basta dunque estrarre la radice quadrata di 30. I metodi esposti nel Capitolo XI permetteranno di calcolarla con l'approssimazione che si vuole.

302. Osservazione II. *Per moltiplicare un radicale di grado* m *per un fattore commensurabile, basta moltiplicare per la potenza* m^esima^ *di questo fattore il numero ch' è sotto il radicale.*

Debbasi moltiplicare $\sqrt[m]{a}$ per b. Si ha $b=\sqrt[m]{b^m}$; quindi

$$\sqrt[m]{a}\times b=\sqrt[m]{a}\times\sqrt[m]{b^m}=\sqrt[m]{a\times b^m}.$$

Quando ad una espressione $b\times\sqrt[m]{a}$ si sostituisce $\sqrt[m]{a\times b^m}$ si dice che *si fa entrare il fattore* b *sotto il radicale.* Reciprocamente si può sostituire a $\sqrt[m]{a\times b^m}$, $b\times\sqrt[m]{a}$, e allora *si fa uscire il fattore* b *dal radicale.*

Esempio. *Debbasi calcolare* $7\sqrt[3]{9}$.

Si ha

$$7=\sqrt[3]{7^3}=\sqrt[3]{343};$$

e per conseguenza

$$7\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{343}\times\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{343\times 9}=\sqrt[3]{3087};$$

basta quindi estrarre la radice cubica dal numero 3087, e i metodi del Capitolo XII permetteranno di calcolarla con quella approssimazione che si vuole.

303*. TEOREMA II. *La radice* m^esima^ *di una frazione è uguale al quoziente delle radici* m^esime^ *dei suoi due termini.*

Bisogna provare che

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}.$$

Per definizione, la potenza m^{esima} di $\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$ è uguale ad $\frac{a}{b}$; quindi per provare che il secondo membro è uguale a $\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$ basta far vedere che la sua potenza m^{esima} è eguale ad $\frac{a}{b}$; ora, si ha (209, 9°)

$$\left(\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)^m=\frac{\left(\sqrt[m]{a}\right)^m}{\left(\sqrt[m]{b}\right)^m}=\frac{a}{b};$$

lo che dimostra la proposizione enunciata.

304. OSSERVAZIONE I. *Il quoziente di due radicali del grado* m^esimo^ *è eguale alla radice* m^esima^ *del quoziente dei numeri posti sotto questi radicali.*

16

Questa osservazione permette di calcolare il quoziente di due radicali dello stesso indice.

ESEMPIO. *Debbasi calcolare* $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$. Si ha

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{2}{5}};$$

basta quindi estrarre la radice quadrata dalla frazione $\frac{2}{5}$, e i metodi del Capitolo XI permetteranno di calcolarla con l'approssimazione che si vuole.

305. OSSERVAZIONE II. *Il quoziente della divisione di un radicale del grado* m^esimo^ *per un divisore commensurabile è uguale alla radice* m^esima^ *del quoziente della divisione del numero ch'è sotto il radicale per la potenza* m^esima^ *del divisore. Il quoziente della divisione di un dividendo commensurabile per un radicale di grado* m^esimo^ *è uguale alla radice* m^esima^ *del quoziente della divisione della potenza* m^esima^ *del dividendo pel numero ch'è sotto il radicale.*

1°. Debbasi dividere $\sqrt[m]{a}$ per b. Si ha $b=\sqrt[m]{b^m}$; quindi

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{b}=\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b^m}}=\sqrt[m]{\frac{a}{b^m}}.$$

2°. Debbasi dividere b per $\sqrt[m]{a}$. Si ha $b=\sqrt[m]{b^m}$; quindi

$$\frac{b}{\sqrt[m]{a}}=\frac{\sqrt[m]{b^m}}{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[m]{\frac{b^m}{a}}.$$

ESEMPIO I. *Debbasi calcolare* $\frac{\sqrt{7}}{5}$. Si avrà

$$\frac{\sqrt{7}}{5}=\sqrt{\frac{7}{25}};$$

e per conseguenza basterà estrarre la radice quadrata dalla frazione $\frac{7}{25}$.

Esempio II. *Debbasi calcolare* $\frac{3}{\sqrt[3]{11}}$. Si ha

$$\frac{3}{\sqrt[3]{11}}=\sqrt[3]{\frac{27}{11}}.$$

e basterà per conseguenza estrarre la radice m^{esima} dalla frazione $\frac{27}{11}$.

306*. Teorema III. *Per inalzare un radicale ad una data potenza, basta elevare a questa potenza il numero posto sotto il radicale.*

Abbiasi il radicale $\sqrt[m]{a}$, e proponiamoci di elevarlo alla quarta potenza. Si ha (300)

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^4=\sqrt[m]{a}\times\sqrt[m]{a}\times\sqrt[m]{a}\times\sqrt[m]{a}=\sqrt[m]{a\times a\times a\times a}=\sqrt[m]{a^4}.$$

Questo ragionamento prova che si ha generalmente

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n=\sqrt[m]{a^n}\,.$$

307*. Teorema IV. *Per estrarre la radice* n^{esima} *da un radicale, basta moltiplicare per* n *l'indice del radicale.*

Abbiasi il radicale $\sqrt[m]{a}$. Dico che si ha

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}.$$

Siccome la potenza mn^{esima} di $\sqrt[mn]{a}$ è a, la proposizione sarà dimostrata provando che la potenza mn di $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

è a. Ora, per elevare alla potenza mn^{esima} il radicale $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$, basta elevare questo radicale alla potenza n, poi inalzare il resultato ottenuto $\sqrt[m]{a}$ alla potenza m, ciò che dà a per risultato finale.

OSSERVAZIONE. *Per estrarre da un numero* a *una radice il cui indice è il prodotto di più fattori* m, n, p, *basta estrarre la radice* m^{esima} *da* a, *poi la radice* n^{esima} *dal resultato, poi infine la radice* p^{esima} *da questo secondo resultato.*

Infatti dal teorema precedente si ha

$$\sqrt[mnp]{a} = \sqrt[np]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[p]{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}}.$$

308*. TEOREMA V. *Un radicale non cambia di valore moltiplicando il suo indice per un numero* n, *ed inalzando al tempo stesso alla* n^{esima} *potenza il numero posto sotto il radicale.*

Abbiasi il radicale $\sqrt[m]{a}$. Dico che si ha

$$\sqrt[mn]{a^n} = \sqrt[m]{a}.$$

Infatti, per l'osservazione precedente, $\sqrt[mn]{a^n} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a^n}}$, e quindi $\sqrt[mn]{a^n} = \sqrt[m]{a}$.

309*. OSSERVAZIONE I. Questo teorema unito al teorema III fa manifesto che *per elevare ad una data potenza un radicale il cui indice è divisibile pel grado della potenza, basta dividere l' indice del radicale pel grado della potenza.*

Infatti sia $m = n \times p$. Si ha

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^p = \sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{\sqrt[p]{a^p}} = \sqrt[n]{a}.$$

Così, elevare alla quarta potenza $\sqrt[8]{3b}$ è lo stesso che calcolare $\sqrt{3b}$.

310*. Osservazione II. Lo stesso teorema permette di ridurre più radicali al medesimo indice.

Abbiansi per esempio i due radicali $\sqrt[m]{a}$ e $\sqrt[n]{b}$; si ha (308)

$$\sqrt[m]{a}=\sqrt[mn]{a^n}\,,\quad \sqrt[n]{b}=\sqrt[mn]{b^m}.$$

In generale, ***più radicali si riducono allo stesso indice moltiplicando l' indice di ciascun radicale pel prodotto di tutti gli altri indici ed inalzando il numero posto sotto questo radicale ad una potenza indicata da questo prodotto.***

Si può anche dare a più radicali un indice comune eguale al minimo multiplo comune dei loro indici. Sieno per esempio due radicali $\sqrt[m]{a}$ e $\sqrt[n]{b}$, e p un multiplo di m e di n, in guisa che $p=m\times q$, $p=n\times q'$; si avrà evidentemente

$$\sqrt[m]{a}=\sqrt[mq]{a^q}=\sqrt[p]{a^q}\,,$$
$$\sqrt[n]{b}=\sqrt[nq']{b^{q'}}=\sqrt[p]{b^{q'}}\,.$$

311*. Osservazione III. La riduzione dei radicali allo stesso indice permette di sostituire un solo radicale al prodotto o al quoziente di radicali d' indici differenti.

Debbasi moltiplicare $\sqrt[3]{5}$ per $\sqrt[4]{7}$. Si ha

$$\sqrt[3]{5}=\sqrt[3\times4]{5^4}=\sqrt[12]{625}\,,$$
$$\sqrt[4]{7}=\sqrt[4\times3]{7^3}=\sqrt[12]{343}.$$

Quindi

$$\sqrt[3]{5}\times\sqrt[4]{7}=\sqrt[12]{625}\times\sqrt[12]{343}=\sqrt[12]{625\times343}=\sqrt[12]{214375}.$$

Radici quadrate dei numeri incommensurabili.

312'. Le regole che abbiamo date nel Capitolo XI per l'estrazione della radice quadrata da un numero intero o frazionario si applicano anche ai numeri incommensurabili; e invero, i ragionamenti di cui abbiamo fatto uso possono applicarsi senza modificazione a un numero incommensurabile. Così

Per estrarre la radice quadrata da un numero incommensurabile N *a meno di un numero dato* $\frac{1}{n}$, *bisogna valutare, per difetto, a meno di un'unità il prodotto* $N \times n^2$, *estrarre a meno di un'unità la radice quadrata dell'intero così ottenuto, e dividere il risultato per* n.

E quando il grado di approssimazione richiesto è espresso da un numero della forma $\frac{1}{10^n}$,

Per estrarre, a meno di $\frac{1}{10^n}$, *la radice quadrata da un numero incommensurabile* N, *bisogna valutare* N, *per difetto, a meno di* $\frac{1}{10^{2n}}$, *cioè con* 2n *decimali, sopprimere poscia la virgola, estrarre a meno di un'unità la radice quadrata dall'intero ottenuto, e separare* n *cifre decimali alla destra del risultato.*

ESEMPIO I. *Debbasi calcolare* $\sqrt{11+\sqrt{28}}$ *a meno di* $\frac{1}{7}$.

Il numero dal quale bisogna estrarre la radice quadrata è nel caso attuale $11+\sqrt{28}$; questa somma è dunque il numero pel quale bisogna moltiplicare 7^2 o 49: il prodotto è

$$11 \times 49 + 49\sqrt{28} = 11 \times 49 + \sqrt{28 \times (49)^2};$$

si calcolerà dunque a meno di un'unità la radice quadrata del prodotto $28\times(49)^2$, le si aggiungerà 11×49, dal risultato si estrarrà la radice quadrata a meno di un'unità, e si dividerà per 7.

Esempio II. *Debbasi calcolare* $\sqrt{17+\sqrt[3]{11}}$ *a meno di* $\frac{1}{100}$.

Bisogna prima valutare $\sqrt[3]{11}$ a meno di $\frac{1}{10^4}$, cioè con quattro decimali esatti; al risultato si aggiungerà 17. Questa somma si moltiplicherà per 10000, si estrarrà la radice quadrata dal prodotto a meno di un'unità e si dividerà per 100.

Radice cubica dei numeri incommensurabili.

313. Le regole che abbiamo date per l'estrazione della radice cubica da un numero intero o frazionario, si applicano anche ai numeri incommensurabili. E invero, i ragionamenti di cui abbiamo fatto uso possono ripetersi senza modificazione sopra un numero incommensurabile. Così,

Per estrarre a meno di $\frac{1}{n}$ *la radice cubica da un numero incommensurabile* N, *bisogna valutare a meno di un'unità per difetto il prodotto* $N\times n^3$, *estrarre a meno di un'unità la radice cubica dall'intero così ottenuto, e dividere il risultato per* n.

E quando il grado di approssimazione richiesto è misurato da un numero della forma $\frac{1}{10^n}$,

Per estrarre a meno di $\frac{1}{10^n}$ *la radice cubica da un numero incommensurabile* N, *bisogna valutare* N *a meno*

di $\frac{1}{10^{3n}}$ *per difetto, sopprimere poscia la virgola, estrarre a meno di un' unità la radice cubica dall' intero così ottenuto, e separare* n *cifre decimali alla destra del risultato.*

ESEMPIO I. *Debbasi calcolare* $\sqrt[3]{15+\sqrt{17}}$ *a meno di* $\frac{1}{12}$.

Il prodotto di $15+\sqrt{17}$ per $(12)^3$ o per 1728, è

$$15\times1728+1728\times\sqrt{17}=15\times1728+\sqrt{17\times(1728)^2};$$

si calcolerà dunque a meno di un' unità la radice quadrata del prodotto $17\times(1728)^2$, vi si aggiungerà 15×1728, si estrarrà a meno di un' unità la radice cubica dal risultato, e si dividerà per 12.

ESEMPIO II. *Debbasi calcolare* $\sqrt[3]{7+\sqrt{132}}$ *a meno di* $\frac{1}{10}$.

Si valuta prima $\sqrt{132}$ a meno di $\frac{1}{10^3}$, cioè con tre cifre decimali esatte, al risultato si aggiunge 7, poi si moltiplica la somma per 1000, si estrae la radice cubica dal prodotto a meno di una unità, e si moltiplica per $\frac{1}{10}$.

Estrazione delle radici il cui indice contiene i soli fattori primi 2 e 3.

314*. I teoremi che abbiamo dimostrato innanzi permettono di ridurre l' estrazione di una radice il cui indice non contiene che i fattori primi 2 e 3, ad estrazioni di radici quadrate e cubiche.

315. *Radici quarta, ottava,* ec. 1°. Sia proposto di estrarre a meno di $\frac{1}{n}$ la radice quarta dal numero N.

Si ha (307)

$$\sqrt{N}=\sqrt{\sqrt{N}}.$$

Si tratta dunque di estrarre la radice quadrata da $\sqrt{N}$ a meno di $\frac{1}{n}$. Le regole precedenti danno la soluzione di questa questione, giacchè esse indicano l'approssimazione con la quale bisogna calcolare $\sqrt{N}$ per avere poi $\sqrt{\sqrt{N}}$ a meno di $\frac{1}{n}$.

Esempio I. *Calcolare* $\sqrt[4]{1726\frac{2}{3}}$ *a meno di un' unità.* Si ha

$$\sqrt[4]{1726\tfrac{2}{3}}=\sqrt{\sqrt{1726\tfrac{2}{3}}};$$

si tratta dunque di estrarre a meno di un' unità la radice quadrata dal numero $\sqrt{1726\frac{2}{3}}$; per quest' oggetto basta operare (241) sulla parte intera di questo numero; si cercherà dunque la parte intera di $\sqrt{1726\frac{2}{3}}$, che è uguale (241) alla radice quadrata a meno di un' unità di 1726, e si estrarrà poi la radice quadrata dal risultato a meno di un' unità.

Esempio II. *Calcolare* $\sqrt[4]{12,5178214}$ *a meno di ur decimo.* Si ha

$$\sqrt[4]{12,5178214}=\sqrt{\sqrt{12,5178214}};$$

si tratta dunque di estrarre a meno di un decimo la radice quadrata dal numero $\sqrt{12,5178214}$: a questo fine bisogna calcolare questo numero a meno di $\frac{1}{100}$ (257)

Ora, per calcolare $\sqrt{12,5178214}$ a meno di $\frac{1}{100}$, si estrarrà a meno di un'unità la radice quadrata da 125178 e si dividerà per 100; si estrarrà poi la radice quadrata dal risultato a meno di $\frac{1}{10}$.

2°. Sia proposto di valutare la radice ottava del numero N a meno di $\frac{1}{n}$.

Si ha (307)

$$\sqrt[8]{N}=\sqrt{\sqrt[4]{N}}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{N}}};$$

si vede che la questione è sempre ridotta all'estrazione di una radice quadrata, per la quale valgono le regole date innanzi.

Esempio. *Calcolare* $\sqrt[8]{1347,45}$ *a meno di un' unità.* Si ha

$$\sqrt[8]{1347,45}=\sqrt{\sqrt[4]{1347,45}};$$

si tratta dunque di estrarre a meno di un' unità la radice quadrata dal numero $\sqrt[4]{1347,45}$; a questo fine, basta operare sulla parte intera di questo numero: si calcolerà dunque prima $\sqrt[4]{1347,45}$ a meno di un' unità, poi si estrarrà la radice quadrata dal risultato a meno di un' unità.

Osservazione. Da ciò che precede risulta che l' estrazione di qualsiasi radice il cui indice è una potenza qualunque di 2, si riduce ad estrazioni di radici quadrate.

316. ***Radici sesta, dodicesima,*** ec. — 1° Sia proposto di estrarre a meno di $\frac{1}{n}$ la radice sesta dal numero N.

Si ha

$$\sqrt[6]{N}=\sqrt[3]{\sqrt{N}}=\sqrt{\sqrt[3]{N}}.$$

Si tratta di estrarre la radice cubica da $\sqrt{N}$ a meno di $\frac{1}{n}$, ovvero la radice quadrata da $\sqrt[3]{N}$; ciò che può farsi mediante le regole esposte innanzi.

Esempio. *Calcolare* $\sqrt[6]{1532,4531452}$ *a meno di* $\frac{1}{10}$.

Si ha

$$\sqrt[6]{1532,4531452}=\sqrt{\sqrt[3]{1532,4531452}}.$$

Si tratta dunque di estrarre a meno di $\frac{1}{10}$ la radice quadrata dal numero $\sqrt[3]{1532,4531452}$. A quest' oggetto, bisogna calcolare questo numero a meno di $\frac{1}{100}$; moltiplicare il risultato per 100, estrarre la radice quadrata dal prodotto a meno di un' unità e dividerla per 10.

2°. Sia proposto di estrarre la radice dodicesima dal numero N a meno di $\frac{1}{n}$.

Si ha

$$\sqrt[12]{N}=\sqrt[3]{\sqrt[4]{N}}.$$

Si tratta dunque di estrarre a meno di $\frac{1}{n}$ la radice cubica da $\sqrt[4]{N}$; ciò che può farsi mediante le regole esposte innanzi.

Esercizi.

I. Siano A e B due numeri commensurabili; trovare le condizioni alle quali debbono sodisfare, perchè $\sqrt{A}$ e $\sqrt{B}$

sieno commensurabili. Questione analoga per $\sqrt[3]{A}$ e $\sqrt[3]{B}$, $\sqrt{A}$ e $\sqrt[3]{B}$.

II. Dimostrare l'eguaglianza

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\sqrt{2}.$$

III. Dimostrare l'eguaglianza

$$\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}=3.$$

IV. La radice quadrata di un numero intero o frazionario è incommensurabile colla sua radice cubica, a meno che il numero non sia una sesta potenza.

CAPITOLO XIV.

TEORIA DEI RAPPORTI E DELLE PROPORZIONI.

Rapporto di due grandezze.

317. Il rapporto di una grandezza ad un' altra dello stesso genere, è il numero che servirebbe di misura alla prima se la seconda fosse presa per unità.

Il rapporto fra due grandezze dicesi commensurabile quando hanno una comune misura contenuta un numero intero di volte in ciascuna di esse. In caso contrario il rapporto dicesi incommensurabile.

318. Teorema. *Qualunque rapporto commensurabile è uguale ad una frazione a termini interi.*

Sieno A e B le grandezze che si vogliono paragonare, le quali, per ipotesi, hanno una comune misura m contenuta un numero intero di volte in ciascuna di esse, 5 volte, per esempio, nella prima, e 7 volte nella seconda. Il rapporto delle due grandezze A e B è lo stesso evidentemente del rapporto dei due prodotti $5\times m$ e $7\times m$. Ora m è il settimo della seconda grandezza, quindi la prima contiene 5 volte il settimo di B, di cui essa è per conseguenza i cinque settimi; al modo stesso si vede che m è il quinto di A, e quindi B contiene 7 volte il quinto di A, di cui essa è per conseguenza i sette quinti. Il rapporto è dunque, secondo il punto di vista al quale ci poniamo, una delle frazioni a termini interi $\frac{5}{7}$ o $\frac{7}{5}$.

Rapporti inversi o reciproci.

319. Da ciò che precede apparisce che tra due grandezze vi ha due rapporti espressi da due frazioni formate dai medesimi termini, come $\frac{5}{7}$ e $\frac{7}{5}$. Questi due rapporti si chiamano ***inversi*** o ***reciproci***, e le frazioni che li rappresentano ricevono il nome di *frazioni inverse* o *reciproche*.

Osservazione. Il prodotto di due frazioni inverse è evidentemente l' unità; talvolta si dà questa proprietà come definizione, e si dice: due numeri sono reciproci quando il loro prodotto è uguale all' unità. Ma noi preferiamo la prima definizione, che ha il vantaggio di fare avvertire l' origine della locuzione di cui si tratta.

Rapporto di due numeri.

320. Rapporto di due numeri interi o frazionari chiamasi il quoziente della loro divisione. È essenziale mostrare che questa definizione non contraddice a quella che abbiamo data innanzi, e che due grandezze della stessa specie rappresentate da numeri, hanno in fatti per rapporto il quoziente della divisione di questi numeri.

Supponiamo, per esempio, che due grandezze riferite ad una medesima unità, sieno rappresentate da $\frac{5}{7}$ e $\frac{2}{3}$. La frazione $\frac{5}{7}$ divisa per $\frac{2}{3}$ dà per quoziente $\frac{15}{14}$; ciò vuol dire che $\frac{5}{7}$ di unità sono i quindici quattordicesimi di $\frac{2}{3}$ di unità, o che il *rapporto* della grandezza

$\frac{5}{7}$ di unità alla grandezza $\frac{2}{3}$ di unità è $\frac{15}{14}$. Dunque le due definizioni si accordano perfettamente.

321*. Osservazione. Abbiamo veduto che il rapporto di due grandezze commensurabili A e B si riduce a quello di due numeri interi cercando la comune misura m tra queste grandezze. È chiaro poi che se m è la massima comune misura fra le date grandezze, il loro rapporto sarà ridotto alla sua più semplice espressione. Quindi allorchè le grandezze date sono espresse in numeri, il loro rapporto sarà ridotto alla sua più semplice espressione cercando il massimo comun divisore di questi numeri secondo i metodi esposti nel capitolo VI. Ma se le due grandezze di cui si cerca la massima comune misura non sono date in numeri, e si dovesse per esempio trovare il rapporto e quindi la massima comune misura fra due lunghezze date, allora l' operazione non potrebbe procedere come pei numeri, ma sarebbe facile sostituire la sottrazione ripetuta a ciascuna divisione voluta dalla regola. Si toglierà dunque la lunghezza minore dalla maggiore tante volte quanto sarà possibile, indi si toglierà anche ripetutamente il resto dalla lunghezza minore, poi si farà lo stesso col secondo resto rispetto al primo, e così di seguito, sino a che togliendo ripetutamente un resto dal precedente non vi sia più resto alcuno. Sarà facile calcolare quante volte l' ultimo resto, ossia la massima comune misura, è contenuta nella lunghezza minore e quante volte nella maggiore, e così queste lunghezze potranno essere rappresentate da due numeri interi esprimenti ciascuno un aggregato di unità eguali alla lunghezza indicante la massima comune misura; quindi al rapporto delle due lunghezze proposte, potrà sostituirsi quello dei due numeri così ottenuti. Supponiamo, per esempio, che la

lunghezza maggiore contenga 5 volte la minore più un resto R, la minore 3 volte R più un resto R', R 2 volte R' esattamente; sarà R' la massima comune misura. Ora R essendo doppia di R', la lunghezza minore che contiene 3 volte R più R', conterrà 7 volte R', cioè la massima comune misura; e la lunghezza maggiore, che contiene 5 volte la minore più R, conterrà 37 volte la massima comun misura R', onde il rapporto delle due lunghezze sarà eguale a quello dei numeri 7 e 37.

322*. Abbiamo già avvertito che un rapporto si chiama incommensurabile quando non esiste una comune misura fra i suoi termini, ossia quando non può assegnarsi il suo valore esattamente. Per esempio, il rapporto di $\sqrt{5}$ a 7 è incommensurabile, perchè estraendo la radice quadrata da 5, quel rapporto si trasforma nell' altro di 2,23606798.... a 7, il quale rapporto dà origine ad infiniti rapporti diversi, secondo che si prende un maggior numero di cifre nella frazione decimale. Così, spezzandola dopò tre cifre, il rapporto sarà 2,236 a 7, ovvero $\frac{2236}{1000}$ a 7, che equivale al rapporto dei numéri interi 2236 a 7000; spezzandola alla quinta cifra, il rapporto sarà quello dei numeri 223606, 700000, ec. Ma quantunque non possa assegnarsi il valore del rapporto $\sqrt{5}$ a 7, sarà in nostro arbitrio di approssimarci ad esso quanto vorremo, prendendo sempre un maggior numero di cifre decimali, sino a che l'errore divenga piccolissimo ed assolutamente trascurabile. Si prendano sette cifre decimali, il rapporto sarà espresso dalla frazione $\frac{22360679}{70000000}$; se ne prendano otto, ed il rapporto sarà $\frac{223606798}{700000000}$, che non differisce dal precedente se non per $\frac{2}{700000000}$, e questa differenza già piccolissima

diminuirebbe ancora adottando un maggior numero di cifre decimali. Il rapporto di $\sqrt{5}$ a 7, ovvero la frazione $\frac{\sqrt{5}}{7}$ è dunque un limite al quale continuamente si accostano, senza raggiungerlo mai, tutti i moltiplici e successivi rapporti che possono formarsi col decimale a periodo infinito 2,236067.... e col numero 7.

Da quanto precede apparisce chiaramente che il fatto di non potersi assegnare il preciso valore di un rapporto incommensurabile non cambia la natura di un tal rapporto, il quale dovrà sempre considerarsi come il quoziente di una divisione, con la differenza che per le grandezze incommensurabili, esso non si potrà ottenere esattamente, ma con una approssimazione indefinita, non dissimile nell' uso dall' esattezza. In conferma di questa verità osserveremo che se si rappresenti un rapporto incommensurabile per mezzo di una frazione ordinaria i cui termini sieno indefiniti, come $\frac{14142136....}{30000000....}$ che ha per limite $\frac{\sqrt{2}}{3}$, dividendo il numeratore e il denominatore di essa per il numeratore, si avrà l'espressione equivalente $\cfrac{1}{2+\cfrac{1715728....}{14142136....}}$, e dividendo i termini della nuova frazione $\frac{1715728....}{14142136....}$ per il suo numeratore, si otterrà

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{8+\cfrac{416312....}{1715728....}}}$$

Continuando a questo modo, il rapporto incommensurabile si cambierà nell'espressione di un numero in-

finito di termini

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{4+\text{ec.}}}}}}$$

che chiamasi frazione continua. Prendendo da questa frazione successivamente uno, due, tre e più termini si dedurrà una serie di frazioni ordinarie

$$\frac{1}{2},\ \frac{8}{17},\ \frac{33}{70},\ \frac{272}{377}.$$

che si approssimeranno gradatamente nel loro valore al rapporto incommensurabile proposto senza poterlo mai raggiungere (nota *B* in fondo al Vol.). Ora l' operazione che ha servito a mutar questo rapporto in una frazione continua è la stessa proposta di sopra per ridurre un rapporto commensurabile di due quantità qualunque, a quello di due numeri interi, poichè l'una e l'altra consistono nella ricerca della massima comune misura fra i termini del rapporto. Dunque il modo di valutare in numeri il rapporto commensurabile o incommensurabile che serbano l' una all' altra due quantità qualunque è unicamente, *di sottrarre la grandezza minore dalla maggiore quante volte è possibile, ed essendovi un resto, sottrarlo quante volte si può dalla grandezza minore, indi togliere anche ripetutamente il secondo resto, se ve n' è, dal primo, e poi il terzo dal secondo, e così di seguito; se le due grandezze proposte saranno fra loro commensurabili, l'operazione avrà un termine, e coi numeri esprimenti, nelle ripetute sottrazioni, quante volte le quantità mi-*

nori erano contenute nelle maggiori, si potrà formare una frazione continua, che ridotta a frazione ordinaria, darà il rapporto numerico cercato; se le due grandezze saranno fra loro incommensurabili, l'operazione progredirà all'infinito, cioè la frazione continua avrà un numero infinito di termini, e se ne potrà dedurre una serie di frazioni, il cui valore andrà man mano accostandosi al rapporto numerico richiesto sino a differirne di una quantità piccolissima ed assolutamente trascurabile.

323*. Comecchè le precedenti considerazioni sul rapporto incommensurabile (*a*) sieno abbastanza luminose, pur nondimeno crediamo utile aggiungere la seguente rigorosa dimostrazione, dovuta a Serret, del teorema che *il rapporto di due grandezze della stessa specie è uguale a quello dei due numeri che le misurano rispettivamente, qualunque sia l'unità impiegata per misurare le due grandezze.*

Questo teorema è stato dimostrato pel caso in cui le due grandezze sieno commensurabili con l'unità impiegata (318); resta quindi a dimostrarlo pel caso in cui le grandezze sieno incommensurabili con questa unità.

Sieno a e b i numeri che misurano queste grandezze, e sia r il rapporto della prima alla seconda. Dividiamo l'unità in un numero qualunque n di parti eguali, e supponiamo che le due grandezze proposte contengano rispettivamente m ed m' di queste parti, ma non ne contengano rispettivamente $m+1$ ed $m'+1$. Per la definizione dei numeri incommensurabili si avrà

$$a > \frac{m}{n}, \qquad a < \frac{m+1}{n},$$

$$b > \frac{m'}{n}, \qquad b < \frac{m'+1}{n},$$

(*a*) Queste considerazioni sono tolte dall'eccellente Aritmetica del professore Amante. T.

Mediante la divisione da queste ineguaglianze si deduce

$$\frac{a}{b} > \frac{m}{n} : \frac{m'+1}{n}, \quad \text{o} \quad > \frac{m}{m'+1},$$

$$\frac{a}{b} < \frac{m+1}{n} : \frac{m'}{n}, \quad \text{o} \quad < \frac{m+1}{m'}.$$

Ciò posto, se la seconda grandezza si divide in m' parti eguali, la prima grandezza non conterrà $m+1$ di queste parti; giacchè esse sono maggiori della n^{esima} parte dell'unità.

Si ha dunque

$$r < \frac{m+1}{m'}.$$

Similmente, se si divide la seconda grandezza in $m'+1$ parti eguali, la prima grandezza conterrà almeno m di queste parti; giacchè esse sono minori della n^{esima} parte dell' unità. Si ha dunque

$$r > \frac{m}{m'+1}.$$

Da ciò segue che i numeri r e $\frac{a}{b}$ sono l' uno e l' altro compresi fra le frazioni $\frac{m+1}{m'}$ e $\frac{m}{m'+1}$, la cui differenza è

$$\frac{(m+1)\times(m'+1)-m\times m'}{m'\times(m'+1)}, \quad \text{o} \quad \frac{m+m'+1}{m'\times(m'+1)} = \frac{1}{m'}\left(\frac{m}{m'+1}+1\right)$$

Se dunque r ed $\frac{a}{b}$ sono ineguali, la loro differenza sarà minore di

$$\frac{1}{m'}\left(\frac{m}{m'+1}+1\right),$$

e, a più forte ragione, minore di

$$\frac{1}{m'}\left(\frac{a}{b}+1\right).$$

Ora, può farsi in modo che l'intero m' sia abbastanza grande perchè la m'^{esima} parte di $\frac{a}{b}+1$ sia minore di qualunque numero dato. Si ha dunque necessariamente

$$\frac{a}{b}=r.$$

Definizione delle proporzioni.

324. Si dice che *quattro grandezze sono in proporzione, quando il rapporto delle due prime è uguale al rapporto delle altre due.*

In aritmetica, ove si considerano i soli numeri, si dice che *quattro numeri sono in proporzione, quando il rapporto dei due primi è uguale al rapporto degli altri due.*

Una proporzione è dunque una eguaglianza tra due rapporti.

È evidente che se quattro numeri sono in proporzione, sarà lo stesso delle grandezze corrispondenti, e che reciprocamente, dalla proporzione tra quattro grandezze risulta quella dei numeri che le rappresentano.

Per rappresentare che quattro numeri a, b, c, d sono in proporzione, si può scrivere

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

ovvero

$$a : b :: c : d,$$

che si legge

a *sta a* b *come* c *sta a* d.

a, b, c, d si chiamano i termini della proporzione; $\frac{a}{b}$ è il primo rapporto, $\frac{c}{d}$ il secondo rapporto; b e c i medi, a e d gli estremi; a l'antecedente e b il conseguente del primo rapporto; c l'antecedente e d il conseguente del secondo rapporto.

325. Quando in una proporzione i medi sono eguali tra loro, si dice che essi sono ***medi proporzionali*** tra gli estremi; e la proporzione toglie nome di ***proporzione continua.***

Esempio. Si ha

$$8 : 4 :: 4 : 2,$$

4 è dunque medio proporzionale tra 8 e 2. La proporzione continua si scrive ancora più brevemente

$$\div 8 : 4 : 2.$$

326*. Da ciò che si è detto di sopra delle quantità incommensurabili risulta che una proporzione contenente queste quantità deve pure considerarsi come l'eguaglianza di due quozienti, o sia di due frazioni, quantunque non se ne possano assegnare esattamente i valori; e dal modo di valutare in numeri il rapporto di due grandezze qualunque si può inoltre dedurre un criterio generale per conoscere quando quattro grandezze sono proporzionali. Si eseguiranno sulle prime due grandezze le sottrazioni successive superiormente indicate e le stesse operazioni si faranno sulle altre due; se i resultamenti delle prime operazioni, comunque prolungate, si accorderanno esattamente con quelli delle seconde, le quattro grandezze saranno in proporzione. Il che

equivale a dire che, se le frazioni continue terminate o indefinite, ottenute dal paragone delle prime due grandezze fra loro, e delle seconde fra loro, riescono identiche in tutte le loro parti, qualunque estensione si dia a quelle frazioni, le quattro grandezze saranno proporzionali.

Questo criterio, senza mascherare la natura delle quantità irrazionali, mostra la possibilità dell'eguaglianza di due rapporti incommensurabili; perciocchè tali rapporti sono *limiti* di due frazioni continue perfettamente eguali fra loro quando se ne prende un egual numero di termini, ed inoltre, quelle frazioni prolungate indefinitamente, si accostano sempre al valore che rappresentano sino a differirne d'una quantità assolutamente trascurabile. Ma qualche volta i rapporti fra quantità incommensurabili sono commensurabili, cioè il quoziente di una quantità irrazionale per un'altra può assegnarsi in numeri interi o frazionari; e ciò conferma maggiormente che quelle quantità non fanno eccezione alla regola generale. Per esempio i rapporti $\sqrt{12} : \sqrt{3}$, e $\sqrt{45} : \sqrt{5}$, posti sotto forma di frazioni, $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}$, esprimono le radici quadrate delle frazioni $\frac{12}{3}$ e $\frac{45}{5}$ (303); e poichè $\frac{12}{3}$ e $\frac{45}{5}$ equivalgono a $\frac{4}{1}$, e $\frac{9}{1}$, i due rapporti si cambiano in $\sqrt{\frac{4}{1}}, \sqrt{\frac{9}{1}}$, ovvero $\frac{2}{1}, \frac{3}{1}$. Dimodochè se si avesse la proporzione

$$\sqrt{12} : \sqrt{3} :: 2\times\sqrt{45} : 3\times\sqrt{5},$$

essa potrebbe ridursi ad una proporzione fra numeri interi: infatti la prima ragione $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ è uguale a $\frac{2}{1}$, e la se-

conda ragione $\frac{2\times\sqrt{45}}{3\times\sqrt{5}}$ equivalente a $\frac{2}{3}\times\sqrt{\frac{45}{5}}$, pareggi a $\frac{2}{3}\times\frac{3}{1}=\frac{6}{3}$; onde la data proporzione si cambia nell'altra, 2 : 1 : : 6 : 3.

Nell'esporre dunque le proprietà generali delle proporzioni geometriche noi prescinderemo da ogni distinzione sulla natura delle quantità che ne formano il soggetto, e ciò che diremo si applicherà tanto alle grandezze commensurabili quanto alle incommensurabili.

Teoremi relativi alle proporzioni.

327. Teorema I. *In qualunque proporzione il prodotto degli estremi è uguale a quello dei medi.*

Abbiasi la proporzione

$$a : b : : c : d,$$

o, ciò ch'è lo stesso,

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}. \quad (1)$$

Se si moltiplicano i due termini della prima espressione per d, e quelli della seconda per b, affine di ridurle allo stesso denominatore, l'eguaglianza (1) diverrà

$$\frac{a\times d}{b\times d}=\frac{c\times b}{d\times b}.$$

Queste due frazioni eguali avendo lo stesso denominatore hanno i loro numeratori eguali, e per conseguenza

$$a\times d=c\times b;$$

ciò che bisognava dimostrare.

328. Osservazione. Questo teorema dà il modo di

trovare un termine di una proporzione di cui si conoscono gli altri tre.

Infatti, poichè il prodotto degli estremi è uguale a quello dei medi, se il termine ignoto è un estremo, moltiplicato per l' altro estremo deve dare un prodotto eguale a quello dei medi; esso è dunque eguale al prodotto dei medi diviso per l'estremo noto. Se il termine incognito è un medio, si vede egualmente che è uguale al prodotto degli estremi diviso pel medio noto.

Esempio. Trovare un tal numero x che si abbia

$$3:7::5:x.$$

Dalla regola enunciata si ha

$$x=\frac{7\times5}{3}=\frac{35}{3}=11\frac{2}{3}.$$

329. Teorema II. *Quattro numeri* a, b, c, d *sono in proporzione se il prodotto degli estremi è uguale al prodotto dei medi.*

Supponiamo che si abbia

$$a\times d=b\times c.$$

Dividiamo per $b\times d$ i due membri di questa eguaglianza, avremo

$$\frac{a\times d}{b\times d}=\frac{b\times c}{b\times d}.$$

Sopprimendo il fattore d comune ai due termini della prima frazione, e il fattore b comune ai due termini della seconda, avremo

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

330. Dai teoremi precedenti risulta che ad una proporzione si possono far subire tutte le trasformazioni che

non alterano l'eguaglianza tra il prodotto degli estremi e quello dei medi. In particolare, si può in una proporzione: 1°. Permutare fra loro i medi o gli estremi; 2°. Porre i medi in luogo degli estremi, e reciprocamente. Così, la proporzione che ha luogo fra quattro numeri a, b, c, d, tali che $a \times d = b \times c$, può essere scritta negli otto seguenti modi:

$$a : b :: c : d,$$
$$a : c :: b : d,$$
$$d : b :: c : a,$$
$$d : c :: b : a,$$
$$b : a :: d : c,$$
$$c : a :: d : b,$$
$$b : d :: a : c,$$
$$c : d :: a : b.$$

331. Teorema III. *In una proporzione si può moltiplicare o dividere uno dei suoi estremi e uno dei suoi medi.*

Infatti è evidente che operando a questo modo si moltiplica o si divide per uno stesso numero il prodotto degli estremi e quello dei medi, lo che non altera la loro eguaglianza.

332. Teorema IV. *Se due proporzioni hanno un rapporto comune, gli altri due rapporti formano una proporzione.*

Infatti dalle due proporzioni

$$a : b :: c : d,$$
$$e : f :: c : d,$$

si può dedurre

$$a : b :: e : f,$$

perchè questi due rapporti, eguali a $c : d$, sono evidentemente eguali fra loro.

333*. Osservazione I. *Se due proporzioni hanno i medesimi antecedenti, i conseguenti sono in proporzione. Se due proporzioni hanno gli stessi conseguenti, gli antecedenti sono in proporzione.*

Abbiansi le due proporzioni

$$a : b :: c : d,$$
$$a : e :: c : f;$$

che hanno gli stessi antecedenti. Permutando fra loro i medi, si ha

$$a : c :: b : d,$$
$$a : c :: e : f;$$

e pel teorema precedente

$$b : d :: e : f.$$

334*. Osservazione II. *Se due proporzioni hanno gli stessi estremi, il rapporto dei conseguenti è inverso a quello degli antecedenti. Se due proporzioni hanno gli stessi medi, il rapporto degli antecedenti è inverso a quello dei conseguenti.*

Siano le due proporzioni

$$a : b :: c : d,$$
$$a : e :: f : d,$$

che hanno gli stessi estremi. Dalla prima proporzione si ha $a \times d = b \times c$, e dalla seconda $a \times d = e \times f$; quindi

$$b \times c = e \times f, \text{ cioè } \frac{b}{e} = \frac{f}{c}.$$

335. Teorema V. *In qualunque proporzione la somma dei due primi termini sta al secondo come la somma dei due ultimi sta al quarto.*

Abbiasi la proporzione

$$a : b :: c : d,$$

o ciò ch'è lo stesso

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

Aggiungendo l'unità ai due membri di questa eguaglianza si ha

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1,$$

ovvero

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d},$$

o ciò ch'è lo stesso

$$a+b : b :: c+d : d.$$

336. Osservazione. Confrontando questa proporzione con la proposta, si ha (333)

$$a : a+b :: c : c+d;$$

cioè che *in qualunque proporzione il primo termine sta alla somma dei due primi come il terzo sta alla somma dei due ultimi.*

337. Teorema VI. *In qualunque proporzione, la differenza dei due primi termini sta al secondo, come la differenza dei due ultimi sta al quarto.*

Abbiasi la proporzione

$$a : b :: c : d,$$

ovvero

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

Togliendo l'unità dai due membri di questa eguaglianza, si ha

$$\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1,$$

ovvero

$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d},$$

o ciò ch' è lo stesso

$$a-b : b :: c-d : d.$$

338. Osservazione I. La proporzione precedente suppone evidentemente che a e c siano maggiori di b e d. Se ciò non fosse, ponendo i medi in luogo degli estremi si otterrebbe una nuova proporzione $b : a :: d : c$, alla quale sarebbe applicabile il teorema.

339. Osservazione II. I teoremi V e VI conducono a conseguenze importanti.

Se invece di $a : b :: c : d$ si scrive la proporzione equivalente

$$a : c :: b : d,$$

ed a questa si applicano i teoremi V e VI, si trova

$$a+c : c :: b+d : d,$$
$$a-c : c :: b-d : d;$$

permutando i medi, queste due ultime proporzioni diventano

$$a+c : b+d :: c : d,$$
$$a-c : b-d :: c : d;$$

cioè, che in una *proporzione qualunque la somma o la differenza degli antecedenti sta alla somma o alla differenza dei conseguenti come un antecedente sta al suo conseguente.* La seconda di queste proporzioni suppone evidentemente che a sia maggiore di c, e per conseguenza b maggiore di d; se ciò non si verifica, invece della proporzione $a : b :: c : d$, si scriverebbe

$$b : a :: d : c,$$

e la medesima dimostrazione darebbe

$$b-d : a-c :: d : c.$$

340. Teorema VII. *In qualunque proporzione la somma dei due primi termini sta alla loro differenza come la somma dei due ultimi sta alla loro differenza.*

Abbiamo provato che da una proporzione qualunque

$$a : b :: c : d,$$

se ne deducono le due seguenti:

$$a+b : b :: c+d : d,$$
$$a-b : b :: c-d : d;$$

le quali, permutando i medi, possono scriversi

$$a+b : c+d :: b : d,$$
$$a-b : c-d :: b : d;$$

dunque, a causa del rapporto comune,

$$a+b : c+d :: a-b : c-d;$$

ovvero, permutando i medi,

$$a+b : a-b :: c+d : c-d.$$

341. Osservazione. Permutando i medi della proporzione proposta, il teorema precedente darebbe

$$a+c : a-c :: b+d : b-d;$$

cioè *che in una proporzione qualunque, la somma degli antecedenti sta alla loro differenza come la somma dei conseguenti sta alla loro differenza.*

342. Teorema VIII. *Moltiplicando termine a termine un numero qualunque di proporzioni si formerà una nuova proporzione.*

Se si hanno le proporzioni

$$a_1 : b_1 :: c_1 : d_1 \quad \text{dalle quali} \quad \frac{a_1}{b_1}=\frac{c_1}{d_1},$$
$$a_2 : b_2 :: c_2 : d_2 \qquad \frac{a_2}{b_2}=\frac{c_2}{d_2},$$
$$a_3 : b_3 :: c_3 : d_3 \qquad \frac{a_3}{b_3}=\frac{c_3}{d_3}.$$

Il prodotto dei tre primi membri è uguale a quello dei tre secondi; quindi

$$\frac{a_1\times a_2\times a_3}{b_1\times b_2\times b_3}=\frac{c_1\times c_2\times c_3}{d_1\times d_2\times d_3},$$

ciò che equivale alla proporzione

$$a_1\times a_2\times a_3 : b_1\times b_2\times b_3 :: c_1\times c_2\times c_3 : d_1\times d_2\times d_3.$$

343. Osservazione. Se le proporzioni considerate sono identiche le une alle altre, il teorema precedente si trasforma nell' altro: *Inalzando ad una medesima potenza tutti i termini di una proporzione, si forma una nuova proporzione.*

344*. Teorema IX. *Dividendo due proporzioni termine a termine, si forma una nuova proporzione.*

Abbiansi le due proporzioni

$$a_1 : b_1 :: c_1 : d_1,$$
$$a_2 : b_2 :: c_2 : d_2;$$

ovvero

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{c_1}{d_1}, \qquad \frac{a_2}{b_2}=\frac{c_2}{d_2}.$$

Dividendo queste due eguaglianze membro a membro, si ottiene

$$\frac{\left(\frac{a_1}{b_1}\right)}{\left(\frac{a_2}{b_2}\right)}=\frac{\left(\frac{c_1}{d_1}\right)}{\left(\frac{c_2}{d_2}\right)}, \quad \text{ovvero} \quad \frac{a_1\times b_2}{a_2\times b_1}=\frac{c_1\times d_2}{c_2\times d_1},$$

o, ciò ch'è lo stesso,

$$\frac{\left(\frac{a_1}{a_2}\right)}{\left(\frac{b_1}{b_2}\right)}=\frac{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)}{\left(\frac{d_1}{d_2}\right)}.$$

345'. TEOREMA X. *Se quattro numeri sono in proporzione, le loro radici dello stesso grado sono anche in proporzione.*

Abbiasi la proporzione

$$a:b::c:d, \quad \text{ovvero} \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

Estraendo la radice m^{esima} da ciascun membro, si ha

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}}=\sqrt[m]{\frac{c}{d}}, \quad \text{ovvero} \quad \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\frac{\sqrt[m]{c}}{\sqrt[m]{d}},$$

che messa sotto forma di proporzione dà

$$\sqrt[m]{a}:\sqrt[m]{b}::\sqrt[m]{c}:\sqrt[m]{d}.$$

346. TEOREMA XI. *In una serie di rapporti eguali la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti come un antecedente sta al suo conseguente.*

Consideriamo una serie di rapporti eguali:

$$a:b::c:d::e:f::g:h;$$

dall'eguaglianza dei due primi rapporti,

$$a:b::c:d,$$

si deduce (339)

$$a+c:b+d::c:d.$$

Sostituendo al rapporto $c : d$, il rapporto eguale $e : f$, si ottiene

$$a+c : b+d :: e : f,$$

da cui si deduce (339)

$$a+c+e : b+d+f :: e : f.$$

Sostituendo al rapporto $e : f$, il rapporto eguale $g : h$, si ottiene

$$a+c+e : b+d+f :: g : h,$$

da cui si deduce (339)

$$a+c+e+g : b+d+f+h :: g : h;$$

ciò che bisognava dimostrare.

347'. Quest' ultimo teorema permette di risolvere il seguente problema: *Dividere un numero qualunque* N *in parti proporzionali a numeri dati* a, b, c, ... Infatti si tratta di trovare dei numeri x, y, z, ..., tali che si abbia

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\ldots,$$

e

$$x+y+z=N.$$

In virtù del teorema precedente, si ha

$$\frac{x}{a}=\frac{N}{a+b+c+\ldots}, \quad \frac{y}{b}=\frac{N}{a+b+c+\ldots},$$
$$\frac{z}{c}=\frac{N}{a+b+c+\ldots}, \quad \ldots;$$

da cui

$$x=\frac{N\times a}{a+b+c+\ldots}, \quad y=\frac{N\times b}{a+b+c+\ldots},$$
$$z=\frac{N\times c}{a+b+c+\ldots}, \quad \ldots$$

Della proporzione aritmetica o dell'equidifferenza.

348*. Due grandezze qualunque dello stesso genere possono paragonarsi fra loro in due diversi modi; 1° *osservando di quanto una supera l' altra;* 2° *osservando quante volte una è contenuta nell' altra,* o più generalmente, *che parte una è dell' altra.* Questo secondo modo di paragone forma il rapporto geometrico di cui abbiamo già parlato; il primo modo dà idea del *rapporto aritmetico.* Quattro grandezze a, b, c, d, tali che la differenza fra la prima e la seconda sia eguale alla differenza fra la terza e la quarta, costituiscono una *proporzione aritmetica* o *equidifferenza.* Quindi una proporzione aritmetica non è altro che l' eguaglianza di due rapporti aritmetici.

La proporzione aritmetica fra quattro grandezze a, b, c, d si scrive

$$a.b\,\dot{:}\,c.d, \quad \text{o} \quad a-b=c-d.$$

349*. Teorema. *In qualunque proporzione aritmetica la somma degli estremi è eguale a quella dei medi.*

Abbiasi la proporzione aritmetica

$$a.b\,\dot{:}\,c.d: \quad \text{o} \quad a-b=c-d.$$

Da questa eguaglianza si deduce

$$a+d=b+c.$$

350*. Osservazione. Se la proporzione è continua, cioè se si ha

$$a.b\,\dot{:}\,b.c,$$

sarà

$$b=\frac{a+c}{2}.$$

b si chiama il *medio aritmetico* delle due quantità a e c.

Per analogia si chiama *medio aritmetico* di più quantità la somma delle medesime divisa per il loro numero; così il medio aritmetico dei numeri 4, 7, 5, 8, è $\frac{4+7+5+8}{4}=6$.

Esercizi.

I. La proporzione $a:b::c:d$ è una conseguenza dell'altra $a+b:a-b::c+d:c-d$.

II. Il maggiore dei quattro termini di una proporzione, aggiunto al minore, dà una somma più grande dei due altri termini.

III. Vi può essere una tal proporzione che aggiungendo uno stesso numero ai suoi quattro termini, si formi una nuova proporzione?

IV. Dalla proporzione $a:b::c:d$ si può dedurre

$$a\times b:c\times d::(a+b)^2:(c+d)^2.$$

V. In qual caso possiamo aggiungere due proporzioni termine a termine, in modo da ottenere una nuova proporzione?

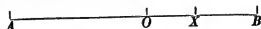
VI. Se si hanno quattro numeri a, b, c, d, tali che b sia eguale a $\left(\frac{a+c}{2}\right)$ e $\frac{1}{c}$ a $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{d}\right)$ i quattro numeri sono in proporzione. Reciprocamente, se in una proporzione $a:b::c:d$, si ha $b=\left(\frac{a+c}{2}\right)$, si avrà pure $\frac{1}{c}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{d}\right)$.

VII. Dalla proporzione $ma+nb:ma'+nb'::a:a'$ resulta l'altra $a:a'::b:b'$, qualunque sieno i numeri m e n.

VIII. Si prenda il mezzo O di una linea AB e si segni un punto X tale che

$$AX:XB::BX:XO;$$

trovare la posizione del punto X

A O X B

IX. La stessa questione, supponendo il punto O posto ai due terzi, ai tre quarti, ai quattro quinti, e in generale agli $\frac{n-1}{n}$ della linea AB.

X. A B' A' B. Se sopra una linea AB si prendono due punti B' e A' di modo che si abbia la proporzione

$$BA' : AB :: A'B' : AB',$$

si avrà

$$\frac{1}{A'B'}+\frac{1}{AB}=\frac{2}{AA'}+\frac{2}{BB'}.$$

CAPITOLO XV.

TEORIA DELLE PROGRESSIONI

—

Progressioni per differenza.

351. Una progressione per differenza è una serie di numeri nei quali la differenza fra uno di essi e quello che lo precede è costante: questa differenza si chiama *ragione* della progressione.

Esempio. I numeri interi 1, 2, 3, 4, ... formano una progressione per differenza la cui ragione è 1.

Per indicare che più numeri 5, 10, 15, 20, 25 ..., formano una progressione per differenza, si scriverà

$$\div 5 . 10 . 15 . 20 . 25 \ldots .$$

Osservazione. Se si scrivono in senso inverso i termini di una progressione, si forma una nuova progressione

$$\div 25 . 20 . 15 . 10 . 5 .$$

che vien detta progressione decrescente, per distinguerla dalla precedente che chiamasi progressione crescente.

352*. Teorema. *Un termine qualunque di una progressione per differenza crescente è uguale al primo, più tante volte la ragione quanti sono i termini che lo precedono; ed è uguale all' ultimo, meno tante volte la ragione quanti sono i termini che lo seguono.*

Abbiasi la progressione per differenza

$$\div a_1 . a_2 . a_3 . a_4 \ldots . a_{n-2} . a_{n-1} . a_n .$$

la cui ragione è δ.

1°. Per definizione si ha

$$a_2 = a_1+\delta,\quad a_3 = a_2+\delta,\quad a_4 = a_3+\delta, \ldots\ldots a_n = a_{n-1}+\delta.$$

Sostituendo il valore di a_2 in quello di a_3, si ha il terzo termine espresso da $a_3 = a_1 + 2\delta$. Sostituendo questo valore di a_3 in quello di a_4, si ha il quarto termine $a_4 = a_1+3\delta$. Così si troverebbe $a_5 = a_1+4\delta$, $a_6 = a_1+5\delta$; e in generale, il termine n^{esimo}

$$a_n = a_1+(n-1)\times\delta.$$

2°. Per definizione si ha anche

$$a_{n-1} = a_n-\delta,\quad a_{n-2} = a_{n-1}-\delta,\quad a_{n-3} = a_{n-2}-\delta.$$

Sostituendo il valore di a_{n-1} in quello di a_{n-2}, si ha $a_{n-2} = a_n-2\delta$; sostituendo questo valore di a_{n-2} in quello di a_{n-3} si ha $a_{n-3} = a_n-3\delta$, e così di seguito. Il primo termine sarà quindi dato dall' eguaglianza

$$a_1 = a_n-(n-1)\times\delta.$$

Osservazione. Per mezzo dell' espressione

$$a_n = a_1+(n-1)\times\delta,$$

si può ottenere un termine qualunque senza passare pei termini intermedi.

Esempio. Vogliasi il venticinquesimo termine della progressione $\div\, 5 . 10 . 15 \ldots.$, si ha

$$a_{25} = 5+(25-1)\times 5 = 125.$$

Inserzione dei medi aritmetici.

353. Inserire m medi aritmetici tra due numeri, a e l, significa formare una progressione di cui a e l sieno i

termini estremi, e di cui questi m medi sieno i termini intermedi.

Per calcolare questi medi e la ragione δ della progressione che essi formano, osserviamo che questa progressione avrà $m+2$ termini; l'ultimo termine l, che supporremo maggiore di a, sarà dunque dato da (352)

$$l = a + (m+1)\times\delta;$$

da cui

$$l - a = (m+1)\times\delta,$$

e quindi

$$\delta = \frac{l-a}{m+1}.$$

Dunque la ragione della progressione che si tratta di formare è eguale alla differenza dei numeri dati divisa per il numero dei medi da inserire aumentato di 1.

Conosciuta la ragione δ, la progressione richiesta è

$$\div\, a \,.\, a+\delta \,.\, a+2\delta \,\ldots\, a+m\delta \,.\, l.$$

Esempio. Vogliansi inserire 8 medi aritmetici tra 25 e 196. Si ha

$$a = 25,\quad l = 196,\quad m = 9,\quad \delta = \frac{196-25}{8+1} = \frac{171}{9} = 19;$$

la progressione richiesta è dunque

$$\div\, 25 \,.\, 44 \,.\, 63 \,.\, 82 \,.\, 101 \,.\, 120 \,.\, 139 \,.\, 158 \,.\, 177 \,.\, 196.$$

354. Osservazione I. *Una progressione per differenza essendo data, se s'inserisce uno stesso numero di medi aritmetici tra ciascun termine e il seguente, la nuova serie ottenuta è una progressione per differenza.*

Abbiasi la progressione

$$\div\, a \,.\, b \,.\, c \,\ldots\, h \,.\, k \,.\, l,$$

la cui ragione è δ, e supponiamo che s' inseriscano m

medi aritmetici tra a e b, m tra b e c, m tra c e d, ec. Le progressioni parziali così formate avranno per ragioni rispettive

$$\frac{b-a}{m+1}, \quad \frac{c-b}{m+1}, \quad \ldots\ldots, \quad \frac{l-k}{m+1},$$

che sono tutte eguali a $\frac{\delta}{m+1}$. Inoltre l'ultimo termine di ciascuna di queste progressioni parziali è il primo della seguente; dunque il loro insieme formerà ancora una progressione per differenza.

355. Osservazione II. Qualunque sia il numero dei medi inseriti tra due numeri a e l, la ragione della progressione ottenuta è il quoziente della divisione di $l-a$ per un numero intero. Reciprocamente, si può determinare il numero dei medi inseriti in guisa tale che il numero intero per il quale bisogna dividere $l-a$, per ottenere la ragione, abbia il valore che si voglia. Se, per esempio, si vuole che la ragione sia $\frac{l-a}{4}$, bisogna inserire 3 medi.

356*. Teorema. *Per inserire tra due numeri dati un numero di medi aritmetici eguale a* $p \times p'-1$, *si può:* 1° *inserire* $p-1$ *medi tra i due numeri dati;* 2° *inserire* $p'-1$ *medi tra ciascun termine della progressione ottenuta e il seguente.*

Supponiamo, infatti, che s'inseriscano $p-1$ medi tra i numeri a e $l>a$. La ragione della progressione ottenuta è

$$\frac{l-a}{p}.$$

Supponiamo ora che s'inseriscano $p'-1$ medi tra ciascun termine di questa progressione e il seguente; si

formerà una nuova progressione per differenza la cui ragione sarà

$$\frac{\left(\frac{l-a}{p}\right)}{p'} \quad \text{o} \quad \frac{l-a}{p\times p'}.$$

Ora, questa ragione è precisamente quella che si sarebbe ottenuta inserendo $p\times p'-1$ medi per differenza tra i numeri a e l; il teorema è dunque dimostrato.

357*. Osservazione I. *Per inserire tra due numeri dati un numero di medi per differenza eguale a* $p\times p'\times p''\ldots.-1$, *si può: 1° inserire* $p-1$ *medi tra i numeri dati; 2° inserire* $p'-1$ *medi tra ciascun termine della progressione ottenuta e il seguente; 3° inserire* $p''-1$ *medi tra ciascun termine di questa seconda progressione e il seguente; e così di seguito.*

Supponiamo, per esempio, che si vogliano inserire $p\times p'\times p''-1$ medi tra due numeri. In conseguenza del teorema precedente, si possono: 1° inserire $p-1$ medi tra i due numeri dati; 2° inserire $p'\times p''-1$ medi tra ciascun termine della progressione ottenuta e il seguente. Ora, questa seconda operazione si riduce, per lo stesso teorema, a inserire solamente $p'-1$ medi, poi a inserire $p''-1$ medi tra ciascun termine della nuova progressione e il seguente.

Così volendo inserire tra due numeri dati un numero di medi aritmetici eguale a 2^n-1, n essendo un numero intero, si può inserire un medio tra i numeri dati, poi un medio tra ciascun termine della progressione ottenuta e il seguente, e così di seguito sino a che la stessa operazione sia stata ripetuta n volte.

358*. Osservazione II. *I numeri che s'introducono in una progressione per differenza inserendo* $p-1$ *medi aritmetici tra ciascun termine e il seguente, e i numeri*

che s' introducono nella stessa progressione inserendo $p'-1$ *medi tra ciascun termine e il seguente, possono essere introdotti al tempo stesso nella progressione inserendo* $p\times p'-1$ *medi aritmetici.*

Infatti, per inserire $p\times p'-1$ medi aritmetici tra i diversi termini di una progressione per differenza, si può cominciare dall' inserire, sia $p-1$, sia $p'-1$ medi, e non resta più che ad inserire $p'-1$ o $p-1$ medi tra i diversi termini della nuova progressione.

Somma dei termini di una progressione per differenza.

359. Teorema. *In una progressione per differenza la somma di due termini egualmente distanti dagli estremi è costante ed eguale alla somma dei termini estremi.*

Abbiasi la progressione per differenza

$$\div a_1 . a_2 . a_3 \ldots . a_{n-2} . a_{n-1} . a_n,$$

la cui ragione è δ.

Si ha

$$a_1+\delta=a_2, \qquad a_2+\delta=a_3, \qquad a_3+\delta=a_4 \ldots,$$
$$a_n-\delta=a_{n-1}, \quad a_{n-1}-\delta=a_{n-2}, \quad a_{n-2}-\delta=a_{n-3} \ldots$$

Sommando per ordine le eguaglianze che sono in corrispondenza, risulterà

$$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=a_4+a_{n-3} \ldots$$

360. Indichiamo con s la somma di n termini di una progressione per differenza $\div a_1 . a_2 . a_3 \ldots$; si ha

$$s=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n:$$

si ha pure, scrivendo i termini in ordine inverso,

$$s=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\ldots+a_3+a_2+a_1.$$

Sommando queste due eguaglianze per ordine, si ha

$$2s=(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+(a_3+a_{n-2})+\dots$$
$$+(a_{n-2}+a_3)+(a_{n-1}+a_2)+(a_n+a_1).$$

Ma le quantità fra parentesi sono tutte eguali, dunque

$$2s=(a_1+a_n)\times n,\ \text{da cui}\ s=\frac{(a_1+a_n)\times n}{2}.$$

Osservazione. Se l'ultimo termine a_n non fosse conosciuto, bisognerebbe prima calcolare a_n e poi sostituirne il valore nella formola precedente; ovvero, poichè si ha

$$a_n=a_1+(n-1)\times\delta,$$

si potrebbe calcolare s direttamente, mediante la formola

$$s=\frac{(a_1+a_n)\times n}{2}=\frac{[2a_1+(n-1)\times\delta]\times n}{2}.$$

Esempio. Calcolare la somma degli n primi numeri impari

$$1+3+5+7+\dots+2n-1.$$

Questi numeri formano una progressione di n termini; la loro somma è dunque

$$s=\frac{(1+2n-1)\times n}{2}=n^2.$$

Quindi la somma degli n primi numeri impari è uguale al quadrato di n.

Progressione per quoziente.

361. Dicesi *progressione per quoziente* o *geometrica* una serie di termini tali che il rapporto di uno di essi

al precedente sia costante. Questo rapporto si chiama *ragione* della progressione. La progressione è crescente o decrescente, secondo che la ragione è maggiore o minore dell'unità.

ESEMPIO. I numeri 4, 8, 16, 32, 64, 128 ec., formano una progressione per quoziente crescente, la cui ragione è 2; i medesimi numeri scritti in senso inverso, cioè 128, 64, 32, 16, 8, 4, formano una progressione per quoziente decrescente, la cui ragione è $\frac{1}{2}$.

Per indicare che i termini a_1, a_2, a_3, ... a_n, formano una progressione per quoziente, si è convenuto di scriverli così

$$\div\div a_1 : a_2 : a_3 : \ldots\ldots : a_n.$$

362*. OSSERVAZIONE. Ciascun termine di una progressione per quoziente è medio proporzionale tra quello che lo precede e quello che lo segue.

Infatti, data la proporzione per quoziente

$$\div\div a_1 : a_2 : a_3 : \ldots\ldots : a_n,$$

si ha per definizione

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \ldots\ldots;$$

e quindi

$$(a_2)^2 = a_1 \times a_3, \quad (a_3)^2 = a_2 \times a_4 \ldots\ldots$$

363. TEOREMA. *Un termine qualunque di una progressione per quoziente è uguale al primo moltiplicato per una potenza della ragione avente per esponente il numero dei termini che lo precedono; e all'ultimo diviso per una potenza della ragione avente per esponente il numero dei termini che lo seguono.*

1°. Sia q la ragione della progressione per quoziente

$$\div\div a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_n,$$

si ha

$$q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_4}{a_3}=\ldots=\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=\frac{a_n}{a_{n-1}},$$

da cui

$$a_2=a_1\times q, \qquad a_3=a_2\times q, \ldots a_n=a_{n-1}\times q;$$

e ben si vede che un termine si forma dal precedente, moltiplicando quest' ultimo per q.

Le eguaglianze precedenti danno ancora

$$a_3=a_1\times q^2, \qquad a_4=a_1\times q^3\ldots;$$

e in generale

$$a_n=a_1\times q^{n-1}.$$

2°. Si ha anche

$$a_{n-1}=\frac{a_n}{q}, \quad a_{n-2}=\frac{a_{n-1}}{q}, \quad a_{n-3}=\frac{a_{n-2}}{q}\ldots,$$

e quindi

$$a_{n-1}=\frac{a_n}{q}, \quad a_{n-2}=\frac{a_n}{q^2}, \quad a_{n-3}=\frac{a_n}{q^3}\ldots$$

Inserzione dei medi per quoziente.

364. Inserire m medi per quoziente tra due numeri a ed l, significa formare una progressione di cui a ed l sieno i termini estremi, e di cui questi m medi sieno i termini intermedi.

Per calcolare questi medi e la ragione della progressione che formano, osserviamo che questa progressione avendo $m+2$ termini, l'ultimo termine l è dato da

$$l=a\times q^{m+1}.$$

da cui

$$\frac{l}{a} = q^{m+1}, \text{ e per conseguenza, } q = \sqrt[m+1]{\frac{l}{a}}.$$

Dunque la ragione della progressione che si tratta di formare è uguale ad una radice del quoziente $\frac{l}{a}$ dei numeri dati, che ha per indice il numero dei medi da inserire aumentato di un' unità.

La ragione q essendo determinata, la progressione richiesta è

$$\div\div a : a \times q : a \times q^2 : \ldots . : a \times q^m : l.$$

365. Osservazione I. *Se s' inserisce un egual numero di medi per quoziente tra ciascun termine e il seguente di una progressione per quoziente, la nuova serie ottenuta è una progressione per quoziente.*

Abbiasi la progressione per quoziente

$$\div\div a : b : c : d : \ldots . : g : h : k : l,$$

la cui ragione è q, e supponiamo che s' inseriscano m medi per quoziente tra ciascun termine e il seguente. Le progressioni parziali formate a questo modo avranno per rispettive ragioni

$$\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}, \quad \sqrt[m+1]{\frac{c}{b}}, \ldots , \quad \sqrt[m+1]{\frac{l}{k}},$$

che sono tutte eguali a $\sqrt[m+1]{q}$. Inoltre, l' ultimo termine di ciascuna di queste progressioni parziali è il primo della seguente; dunque il loro insieme forma ancora una progressione per quoziente.

366. Osservazione II. Perchè tre numeri a, b e c possano far parte di una stessa progressione, bisogna

potere inserire tra a e c un tal numero di medi, che la progressione che ne risulta abbia b tra i suoi termini; indicando con m questo numero ignoto di termini, e con q la ragione della progressione, si ha

$$q=\sqrt[m+1]{\frac{c}{a}}.$$

Supponiamo che b sia il termine n^{esimo} di questa progressione; dovrà aversi

$$b=a\times q^{n-1}, \text{ ovvero } \frac{b}{a}=q^{n-1}.$$

Inalzando i due termini di questa eguaglianza alla potenza $m+1$, si ha

$$\frac{b^{m+1}}{a^{m+1}}=(q^{n-1})^{m+1}=(q^{m+1})^{n-1}.$$

Ma da altra parte si ha (299)

$$q^{m+1}=\frac{c}{a};$$

quindi

$$\frac{b^{m+1}}{a^{m+1}}=\frac{c^{n-1}}{a^{n-1}}.$$

Supponiamo che b, a e c siano commensurabili, saranno tali pure $\frac{b}{a}$ e $\frac{c}{a}$; se indichiamo con $\frac{b_1}{a_1}$ e $\frac{c_1}{a_2}$ le frazioni irriducibili equivalenti, l' ultima eguaglianza diventa

$$\frac{b_1^{m+1}}{a_1^{m+1}}=\frac{c_1^{n-1}}{a_2^{n-1}}.$$

Ma queste due frazioni sono irriducibili, quindi non

possono essere eguali se non si ha

$$b_1^{m+1} = c_1^{n-1}, \quad a_1^{m+1} = a_2^{n-1};$$

da cui resulta evidentemente che b_1 e c_1 debbono essere composti dei medesimi fattori primi, come pure a_1 e a_2, e che gli esponenti di uno stesso fattore, in b_1 e c_1, e in a_1 e a_2, debbono avere un rapporto costante $\frac{n-1}{m+1}$.

Applicazione. *Quali sono i numeri commensurabili che possono far parte di una progressione per quoziente che ha per termini* 1 *e* 10?

Indicando con $\frac{p}{q}$ il numero cercato, e con m ed n numeri interi, bisogna avere in virtù di ciò che precede

$$\left(\frac{10}{1}\right)^{m+1} = \left(\frac{\left(\frac{p}{q}\right)}{1}\right)^{n-1},$$

cioè

$$10^{m+1} = \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}}.$$

Il primo membro essendo intero, dev' esserlo anche il secondo, e poichè la frazione $\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}}$ è (160) irriducibile bisogna che si abbia $q = 1$. Inoltre, perchè 10^{m+1} sia eguale a p^{n-1}, bisogna che p contenga i soli fattori 2 e 5, e che questi fattori abbiano esponenti eguali, o in altri termini, che p sia una potenza di 10.

Dunque le potenze di 10 sono i soli numeri commensurabili che possono figurare in una progressione per quoziente di cui 1 e 10 fanno parte.

367'. Teorema. *Per inserire tra due numeri dati un numero di medi per quoziente eguale a* $\mathrm{p} \times \mathrm{p}' - 1$, *si può:* 1° *inserire* $\mathrm{p}-1$ *medi tra i due numeri dati;* 2° *in-*

serire $p'-1$ *medi tra ciascun termine della progressione ottenuta e il seguente.*

Supponiamo infatti che s'inseriscano $p-1$ medi tra i numeri a ed l. La ragione della progressione ottenuta sarà

$$\sqrt[p]{\frac{a}{l}}.$$

Supponiamo che s'inseriscano $p'-1$ medi tra ciascun termine di questa progressione e il seguente; si formerà una nuova progressione per quoziente, la cui ragione sarà (365)

$$\sqrt[p']{\sqrt[p]{\frac{l}{a}}}, \quad \text{o} \quad \sqrt[pp']{\frac{l}{a}}.$$

Or questa ragione è precisamente quella che si sarebbe ottenuta inserendo $p\times p'-1$ medi per quoziente tra i numeri a ed l; il teorema è dunque dimostrato.

368*. Osservazione I. *Per inserire tra due numeri un numero di medi per quoziente eguale a* $p\times p'\times p''....-1$, *si può:* 1° *inserire* $p-1$ *medi tra i numeri dati;* 2° *inserire* $p'-1$ *medi tra ciascun termine della progressione ottenuta e il seguente;* 3° *inserire* $p''-1$ *medi tra ciascun termine di questa seconda progressione e il seguente; e così di seguito.*

Supponiamo per esempio che si vogliano inserire $p\times p'\times p''-1$ medi tra due numeri. Per il teorema precedente si può: 1° inserire $p-1$ medi tra i numeri dati: 2° inserire $p'\times p''-1$ medi tra ciascun termine della progressione ottenuta e il seguente. Ma questa seconda operazione per lo stesso teorema si riduce ad inserire solamente $p'-1$ medi, poi a inserire $p''-1$ medi tra ciascun termine della nuova progressione e il seguente.

Così per inserire tra due numeri dati un numero di medi per quoziente eguale a 2^n-1, si può inserire un medio tra i numeri dati, poi un medio tra ciascun termine della progressione ottenuta e il seguente; e così di seguito, sino a che la medesima operazione sia stata ripetuta n volte. Da ciò risulta che l'inserzione di 2^n-1 medi per quoziente tra due numeri, si riduce ad inserire molte volte un medio per quoziente tra due numeri; quindi essa non richiede altra operazione che l'estrazione della radice quadrata.

369*. OSSERVAZIONE II. *I numeri che s' introducono in una progressione per quoziente inserendo* $p-1$ *medi tra ciascun termine e il seguente, e i numeri che s' introducono nella stessa progressione inserendo* $p'-1$ *medi tra ciascun termine e il seguente, possono essere introdotti al tempo stesso nella progressione mediante l' inserzione di* $p\times p'-1$ *medi per quoziente.*

Infatti, per inserire $p\times p'-1$ medi per quoziente tra i diversi termini di una progressione per quoziente, si può incominciare dall' inserire sia $p-1$ sia $p'-1$ medi, e non restano da inserire che $p'-1$ o $p-1$ medi tra i diversi termini della nuova progressione ottenuta.

Prodotto dei termini di una progressione per quoziente.

370*. TEOREMA I. *In una progressione per quoziente i prodotti dei termini estremi e degli equidistanti dagli estremi si eguagliano.*

Si ha

$$a_1=\frac{a_2}{q},\qquad a_2=\frac{a_3}{q},\qquad a_3=\frac{a_4}{q},\quad \ldots\ldots,$$
$$a_n=a_{n-1}\times q,\quad a_{n-1}=a_{n-2}\times q,\quad a_{n-2}=a_{n-3}\times q,\quad \ldots\ldots;$$

da queste eguaglianze, moltiplicandole ordinatamente fra

loro, risulta

$$a_1 \times a_n = a_2 \times a_{n-1} = a_3 \times a_{n-2} = a_4 \times a_{n-3} = \ldots\ldots$$

371*. Teorema II. *Il prodotto dei termini di una progressione per quoziente è eguale alla radice quadrata del prodotto degli estremi inalzato ad una potenza il cui grado è eguale al numero dei termini.*

Abbiasi la progressione

$$\div\div a_1 : a_2 : a_3 : \ldots\ldots : a_{n-2} : a_{n-1} : a_n.$$

Indichiamo con P il prodotto di tutti i termini; si ha

$$P = a_1 \times a_2 \times a_3 \times \ldots\ldots \times a_{n-2} \times a_{n-1} \times a_n,$$

e ancora

$$P = a_n \times a_{n-1} \times a_{n-2} \times \ldots\ldots \times a_3 \times a_2 \times a_1.$$

Moltiplicando queste due eguaglianze fra loro si ottiene

$$P^2 = (a_1 \times a_n) \times (a_2 \times a_{n-1}) \times (a_3 \times a_{n-2}) \times \ldots\ldots$$
$$\times (a_{n-2} \times a_3) \times (a_{n-1} \times a_2) \times (a_n \times a_1);$$

e pel teorema precedente

$$P^2 = (a_1 \times a_n)^n, \quad \text{ovvero} \quad P = \sqrt{(a_1 \times a_n)^n}.$$

Somma dei termini di una progressione per quoziente.

372. Abbiasi la progressione per quoziente

$$\div\div a_1 : a_2 : n_3 : a_4 : \ldots\ldots : a_{n-1} : a_n;$$

bisogna valutare la somma

[1] $$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots\ldots + a_{n-1} + a_n.$$

Chiamando q la ragione, e moltiplicando per q i

due membri dell'eguaglianza [1], si ottiene

$$S\times q = a_1\times q + a_2\times q + a_3\times q + a_4\times q + \ldots + a_{n-1}\times q + a_n\times q;$$

ma per ipotesi

$$a_1\times q = a_2,\quad a_2\times q = a_3,\quad a_3\times q = a_4 \ldots a_{n-1}\times q = a_n;$$

quindi l'eguaglianza precedente diventa

[2] $$S\times q = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + a_n\times q.$$

Supponiamo $q > 1$; si sottragga l'eguaglianza [1] dalla [2] membro a membro, si ottiene

$$S\times q - S = a_n\times q - a_1,$$

o

$$S\times(q-1) = a_n\times q - a_1,$$

e per conseguenza

$$S = \frac{a_n\times q - a_1}{q-1}.$$

Se $q < 1$, bisogna sottrarre l'eguaglianza [2] dalla [1], e si ha

$$S - S\times q,\quad \text{o}\quad S\times(1-q) = a_1 - a_n\times q,$$

da cui

$$S = \frac{a_1 - a_n\times q}{1-q}.$$

Da ciò che precede si deduce che: *per avere la somma dei termini di una progressione per quoziente, bisogna prendere la differenza tra il primo termine e il prodotto dell'ultimo per la ragione, poi dividere il resultato per la differenza tra l'unità e la ragione.*

Osservazione I. È noto che $a_n = a_1\times q^{n-1}$; se questo valore di a_n si sostituisce nei due valori già tro-

vati di S, si ottiene

$$S=\frac{a_1\times(q^n-1)}{q-1},$$

$$S=\frac{a_1\times(1-q^n)}{1-q}.$$

373'. **Osservazione II.** Se nell' eguaglianza [1] si sostituisce ad a_2 il suo valore $a_1\times q$, ad a_3, $a_1\times q^2$ ec., si ha l' altra eguaglianza

$$S=a_1+a_1\times q+a_1\times q^2+\ldots\ldots+a_1\times q^{n-2}+a_1\times q^{n-1},$$

ovvero

$$S=a_1\times(1+q+q^2+q^3+\ldots\ldots+q^{n-2}+q^{n-1}).$$

Confrontando questa espressione con l' altra

$$S=a_1\times\frac{q^n-1}{q-1},$$

si vede che deve aversi

$$1+q+q^2+q^3+\ldots\ldots+q^{n-2}+q^{n-1}=\frac{q^n-1}{q-1}.$$

Esempio. Trovare la somma dei numeri

$$1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ldots\ldots,\ 2^{10}.$$

Questi numeri formano una progressione per quoziente, e si ha

$$a_1=1,\quad q=2,\quad n=11;$$

quindi

$$S=\frac{2^{11}-1}{2-1}=2^{11}-1=2047.$$

Osservo che questo risultato poteva anche ottenersi dall' identità dimostrata nell' Osservazione II.

Limite della somma dei termini di una progressione per quoziente, quando il numero di questi termini aumenta indefinitamente.

374*. Sieno a il primo termine e q la ragione di una progressione per quoziente

$$\div a : a\times q : a\times q^2 : a\times q^3 \ldots,$$

che ha un numero illimitato di termini. Ci proponiamo di determinare come varia la somma degli n primi termini di questa progressione, quando il numero n aumenta indefinitamente. Questa ricerca si fonda sui due teoremi seguenti.

375*. Teorema I. *Le potenze successive di un numero* q *maggiore di* 1 *crescono indefinitamente e possono divenir maggiori di qualunque numero dato.*

Poichè si ha $q > 1$, se ne deduce

$$q^2 > q, \quad q^3 > q^2, \ldots \quad q^{m+1} > q^m.$$

Poniamo inoltre

$$q-1 = b,$$

avremo

$$q^2-q > b,$$

e a più forte ragione

$$q^3-q^2 > b,$$
$$q^4-q^3 > b,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$q^{m-1}-q^{m-2} > b,$$
$$q^m-q^{m-1} > b.$$

Sommando tutte queste relazioni fra loro, si ha

$$q^m-1 > m\times b;$$

da cui

$$q^m > 1+m\times b.$$

Dunque, perchè q^m superi una quantità data h, basta prendere m in guisa tale che si abbia

$$1+m\times b > h, \text{ o } m > \frac{h-1}{b}.$$

Esempio. Si voglia che sia $3^m > 10000$. Essendo $\frac{h-1}{b} = \frac{9999}{2}$, basta fare $m=5000$.

376*. Teorema II. *Le potenze successive di un numero* q *minore di* 1 *diminuiscono indefinitamente, e possono divenir minori di qualunque numero dato.*

Essendo $q<1$, se ne deduce

$$q^2<q,\quad q^3<q^2,\ldots,\quad q^{m+1}<q^m.$$

Ora vogliamo determinare un numero m in modo che sia

$$q^m<h,$$

essendo h un numero qualunque. È chiaro che si ha $\frac{1}{q^m}>\frac{1}{h}$; e poichè $\frac{1}{q}$ è un numero maggiore di 1, pel teorema precedente si dovrà fare

$$m > \frac{\frac{1}{h}-1}{\frac{1}{q}-1}, \quad \text{ovvero} \quad m > \frac{q\times(1-h)}{h\times(1-q)}.$$

Esempio. Si voglia che sia $\left(\frac{2}{3}\right)^m < 0{,}0001$, sarà

$$\frac{q\times(1-h)}{h\times(1-q)} = \frac{\frac{2}{3}\times 0.9999}{0{,}0001\times\frac{1}{3}} = 19998.$$

377*. Riprendiamo adesso la progressione illimitata

$$\div a : a \times q : a \times q^2 : a \times q^3 : \ldots,$$

e indichiamo con S la somma degli n primi termini.

1°. Se $q > 1$, i termini della progressione crescono al di là di qualunque limite; per conseguenza S cresce anche al di là di qualunque limite, quando n aumenta indefinitamente.

2°. Sè $q < 1$, S ha per valore

$$S = \frac{a - a \times q^n}{1-q},$$

ovvero

$$S = \frac{a}{1-q} \times (1-q^n).$$

Ora, il fattore q^n si avvicina indefinitamente a zero a misura che n aumenta; dunque la quantità $1-q^n$ si avvicina indefinitamente a 1, e per conseguenza S ha per limite $\frac{a}{1-q}$. Da ciò si deduce che:

La somma degli n *primi termini di una progressione per quoziente decrescente ha per limite il primo termine diviso per l'unità meno la ragione, quando l'intero* n *aumenta indefinitamente.*

Esempio. Trovare il limite della somma dei termini della progressione $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ la cui ragione è $\frac{1}{2}$.

Per questo limite si trova $\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$ o 2.

378*. Una frazione decimale periodica semplice è la somma dei termini di una progressione per quoziente, decrescente e illimitata.

Infatti, è chiaro che indicando con m il numero

delle cifre del periodo, e con k il numero intero che rappresenta il periodo, una frazione decimale periodica semplice è rappresentata in generale da

$$\frac{k}{10^m}+\frac{k}{10^{2m}}+\frac{k}{10^{3m}}+\dots$$

Or questa è la somma dei termini di una progressione per quoziente decrescente,

$$\div\frac{k}{10^m}:\frac{k}{10^{2m}}:\frac{k}{10^{3m}}:\dots,$$

la cui ragione è $\frac{1}{10^m}$.

Quindi il limite S di quella somma sarà dato da

$$S=\frac{\frac{k}{10^m}}{1-\frac{1}{10^m}}=\frac{\frac{k}{10^m}}{\frac{10^m-1}{10^m}}=\frac{k}{10^m-1}.$$

Ma il denominatore di questa frazione è un numero composto di tanti 9 quante unità contiene m, ed m contiene tante unità quante sono le cifre del numero k; dunque il limite di una frazione decimale periodica semplice è una frazione ordinaria che ha per numeratore le cifre del periodo, e per denominatore un numero composto di tanti 9 quante sono le cifre del periodo; lo che è precisamente il risultato ottenuto nella teoria delle frazioni decimali periodiche.

Esercizi.

I. Quali sono le progressioni per differenza in cui la somma di due termini qualunque fa parte della progressio-

ne; e quali le progressioni per quoziente in cui il prodotto di due termini fa parte della progressione?

II. Se in una serie di numeri ciascuno è la semisomma di quelli fra i quali è compreso, questi numeri formano una progressione per differenza, e se ciascuno è medio proporzionale tra i due che lo comprendono, essi formano una progressione per quoziente.

III. Quali sono le progressioni per differenza in cui vi ha un rapporto indipendente da n tra la somma degli n primi termini e la somma degli n seguenti?

IV. $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ e $\sqrt{7}$ possono far parte di una stessa progressione per differenza o per quoziente?

V. Se si prende la serie dei numeri impari 1, 3, 5, 7, ... e si separa in classi di cui la prima abbia un termine, la seconda due termini, la terza tre ec., la somma dei termini di una stessa classe è un cubo.

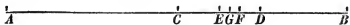
VI. Se si considera la serie 1, 2, 4, 6, 8, 10...., la somma degli n primi termini è impari, e aumentata degli $n-1$ numeri impari seguenti, dà un cubo.

VII. In una progressione geometrica di sei termini, la differenza dei termini estremi è maggiore del sestuplo della differenza dei termini di mezzo.

VIII. Se si sommano termine a termine due progressioni geometriche che non hanno la stessa ragione, i resultati non formeranno una progressione, ma ciascun termine potrà dedursi dai due precedenti, moltiplicandoli per numeri costanti e addizionando i prodotti.

IX. Si formi una serie di termini tali che ciascuno sia la semisomma dei precedenti; conoscendo i due primi termini di questa serie, trovare a qual limite ci si avvicina allorchè se ne forma un numero di più in più grande.

X. Sia AB una linea qualunque, e sieno C il suo punto di mezzo,

A C EGF D B

D il mezzo di CB, E il mezzo di DC, F il mezzo di ED, G il mezzo di FE, e così di seguito fino all'infinito; provare

che i punti C, D, E, F, G, si avvicinano sempre più al terzo di AB cominciando dal punto B.

XI. Trovare il limite della somma delle frazioni

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\frac{5}{32}+\ldots,$$

di cui i numeratori formano una progressione per differenza, e i denominatori una progressione per quoziente.

XII. Si formi la serie dei numeri

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ \text{ec.},$$

tali che la differenza di due termini consecutivi aumenti continuamente di una unità: trovare la somma degli n primi termini di questa serie.

XIII. Se in una progressione per differenza tre termini consecutivi sono numeri primi, la ragione è divisibile per 6, a meno che il primo di questi termini non sia 3. Se ve n'è 5, la ragione è divisibile per 30, purchè il primo di questi termini non sia 5; e se ve n'è 7, essa è divisibile per 210, purchè il primo termine non sia 7.

XIV. In una progressione per quoziente di cui il numero dei termini è impari, la somma dei quadrati dei termini è uguale alla somma dei termini moltiplicata per l'eccesso della somma dei termini di posto impari, sulla somma dei termini di posto pari.

XV. Se n è un numero primo con la ragione di una progressione per differenza di cui i termini sono interi, dividendo n termini consecutivi per n, si otterranno per resti tutti i numeri $1, 2, 3, \ldots\, n-1$.

XVI. La durata dell'anno supera 365 giorni, ed è per questa ragione che ogni quattro anni s'intercala un 366$^{\text{mo}}$ giorno (anno bisestile); questo 366$^{\text{mo}}$ giorno è soppresso ogni 100 anni e ristabilito ogni 400 anni: provare che se si seguisse indefinitamente la stessa legge, cioè, se si togliesse questo giorno tutti i 100^2 anni per rimetterlo ogni 4×100^2 anni; e se si sopprimesse ogni 100^3 anni per rimetterlo ogni 4×100^3 anni ec.; dopo un gran numero d'anni ciò tornerebbe lo stesso che aggiungere 8 giorni ogni 33 anni.

XVII. Due corrieri A e B seguono una stessa linea retta: A è 240^m indietro, ma va due volte più veloce; provare che per incontrare B dovrà fare un cammino eguale a $240^m + \frac{240}{2} + \frac{240}{4} + \frac{240}{8} + \ldots$ e calcolare questo cammino.

XVIII. La produzione del ferro in Francia è stata, nel 1826, di 1156850 q. m.; nel 1847 si elevava a 3601901 q. m.; calcolare il suo valore nel 1835, supponendo l'aumento eguale per ogni anno.

CAPITOLO XVI.

TEORIA DEI LOGARITMI.

—

379. Abbiansi due progressioni crescenti e indefinite,

$$\div\div 1 : q : q^2 : q^3 : q^4 : \ldots,$$
$$\div\ 0 \,.\, r \,.\, 2r \,.\, 3r \,.\, 4r \ldots\ldots,$$

una per quoziente che comincia con 1, l'altra per differenza che comincia con zero.

I termini della progressione per differenza si chiamano i *logaritmi* dei termini del medesimo posto nella progressione per quoziente.

Le due progressioni di cui si tratta costituiscono un *sistema di logaritmi*, e sono sottoposte alla sola condizione di cominciare la prima con 1, la seconda con zero.

Il solo sistema di logaritmi che si adoperi risulta dalle progressioni

$$\div\div 1 : 10 : 100 : 1000 : \ldots.$$
$$\div\ 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ \ldots\ldots$$

Osservazione. Il logaritmo di un numero considerato isolatamente è affatto arbitrario. Se si domanda: qual è il logaritmo di 3? questa questione non ha significato finchè non si sono scelte le progressioni che definiscono il sistema di cui si vuol parlare.

380. Dalla definizione precedente sembrerebbe risultare che, scelte le due progressioni che definiscono un sistema di logaritmi, i numeri che non fanno parte della progressione per quoziente non abbiano logaritmi; ma è facile vedere come, rendendo più generale questa definizione, si è condotti a riguardare ciascun numero maggiore dell'unità come avente un logaritmo.

Supponiamo che tra due termini consecutivi di cia-

scuna delle progressioni date s' inserisca uno stesso numero di medi. Si otterranno [(354), (365)] due nuove progressioni nelle quali i termini delle progressioni primitive si corrisponderanno ancora, e i termini nuovamente introdotti nella progressione per quoziente, avranno per logaritmi i termini dello stesso posto introdotti nella progressione per differenza.

381*. Osservazione. Perchè la definizione data (378) sia ammissibile, bisogna mostrare che se si può introdurre un numero nella progressione per quoziente inserendo tra ciascun termine e il seguente un certo numero di medi, e se si può anche introdurlo inserendo un altro numero di medi, si troverà nei due casi lo stesso logaritmo.

Supponiamo che il numero N essendo stato introdotto nella progressione per quoziente mediante l' inserzione di $p-1$ medi tra ciascun termine e il seguente, si sia trovato n per suo logaritmo; e che questo stesso numero essendo stato introdotto mediante l' inserzione di $p'-1$ medi, si sia trovato n' per suo logaritmo. Dico che si ha $n'=n$.

Infatti, se, dopo avere inserito $p-1$ medi tra ciascun termine di ciascuna progressione e il seguente, s' inseriscano $p'-1$ medi tra i diversi termini delle nuove progressioni ottenute, si sarà nello stesso caso che se si fossero inseriti fin dal principio $p\times p'-1$ medi tra i diversi termini delle progressioni primitive. Dunque mediante l' inserzione di $p\times p'-1$ medi, si trova n per logaritmo di N. Al modo stesso, se, dopo avere inserito $p'-1$ medi tra ciascun termine di ciascuna progressione e il seguente, s' inseriscano $p-1$ medi tra i diversi termini delle nuove progressioni ottenute, si sarà nello stesso caso che se si fossero inseriti fin dal principio $p\times p'-1$ medi tra i diversi termini delle progressioni primitive. Dunque, inserendo $p\times p'-1$ medi si tro-

va n' per logaritmo di N. Da ciò risulta evidentemente che $n' = n$.

382. Osservazione. Se si calcolano dei logaritmi inserendo un certo numero di medi tra i termini consecutivi delle due progressioni; poi che se ne calcolino altri, inserendo un altro numero di medi, questi diversi logaritmi possono essere considerati come facenti parte di uno stesso sistema (367). Questa osservazione prova che i logaritmi si possono calcolare indipendentemente gli uni dagli altri, senza obbligarsi ad inserire costantemente uno stesso numero di medi in tutta la serie delle due progressioni. È sufficiente che il numero dei medi inserito sia lo stesso tra i termini corrispondenti.

383. I numeri i cui logaritmi sono definiti nei paragrafi precedenti crescono per gradi vicini quanto si vuole. Tuttavia se ci si limitasse a questa definizione, una infinità di numeri dovrebbero essere riguardati come non aventi logaritmi. Si sa per esempio che, qualunque sia il numero dei medi inseriti nella progressione per quoziente $\div\!\div 1 : 10 : 100 : \ldots$, niuno di questi medi è commensurabile. Al contrario, tutti i numeri commensurabili possono introdursi nella progressione per differenza $\div 0 . 1 . 2 . 3 . 4 \ldots$, da cui resulta che *i numeri commensurabili che non sono interi, sono tutti logaritmi di numeri incommensurabili.*

384*. Quando un numero non può essere introdotto nella progressione per quoziente, il suo logaritmo si definisce nel modo seguente.

Si chiama *logaritmo* di un numero N che non può essere introdotto nella progressione per quoziente mediante l'inserzione di medi, un numero maggiore dei logaritmi dei numeri inferiori a N, capaci di essere introdotti mediante l'inserzione dei medi, e minore dei logaritmi dei numeri superiori a N, capaci egual-

mente di essere introdotti mediante l'inserzione dei medi.

Questa definizione permette di assegnare due numeri che comprendano tra loro il logaritmo di N, e la cui differenza sia piccola quanto si vuole; per conseguenza, essa permette di formare dei valori successivi che si avvicinano indefinitamente a questo logaritmo. Infatti, immaginiamo che s' inseriscano $p-1$ medi per quoziente tra i diversi termini della progressione per quoziente, e $p-1$ medi per differenza tra i diversi termini della progressione per differenza.

Sieno

$$\div\!\div 1 : q' : q'^2 : q'^3 : \ldots\ldots : q'^i : q'^{i+1} : \ldots\ldots,$$
$$\div\; 0 \,.\, r' \,.\, 2r' \,.\, 3r' \ldots\ldots ir' \,.\, (i+1)r' \ldots,$$

le nuove progressioni ottenute. Per ipotesi, N non farà parte della progressione per quoziente, ma sarà compreso tra due termini consecutivi, giacchè (377) la ragione q' essendo maggiore di 1, i termini finiscono per divenire maggiori di qualunque numero dato. Sieno q'^i e q'^{i+1} i termini tra i quali N è compreso; i logaritmi di questi due numeri sono ir' e $(i+1)r'$ e hanno per differenza r'. Dunque, per definizione, il logaritmo di N è compreso tra ir' e $(i+1)r'$. Per conseguenza, prendendo invece di questo logaritmo l'uno o l'altro di questi due numeri, l'errore commesso sarà minore di r'. Ora si ha (353)

$$r' = \frac{r}{p},$$

e si può prendere p tanto grande che $\frac{r}{p}$ sia minore di qualunque numero dato.

Il logaritmo di un numero s'indica ponendo le iniziali *log* a sinistra di questo numero. Così *log* N rappresenterà il logaritmo di N.

Proprietà dei logaritmi.

385. Teorema I. *Il logaritmo del prodotto di due fattori è uguale alla somma dei logaritmi dei fattori.*

Sieno

$$\because 1 : q : q^2 : \ldots\ldots : q^n : \ldots\ldots : q^m : \ldots\ldots : q^{m+n},$$
$$\div\ 0 \,.\, r \,.\, 2r \ldots\ldots nr \ldots\ldots mr \ldots\ldots (m+n)r$$

le due progressioni che definiscono un sistema qualunque di logaritmi. I termini della prima sono le potenze della ragione q; quelli della seconda, i multipli della ragione r.

Ciò posto, consideriamo due termini della progressione per quoziente, q^m e q^n per esempio; avremo

$$log\, q^m = mr, \qquad log\, q^n = nr.$$

D'altra parte, il prodotto $q^m \times q^n$, o q^{m+n}, è il termine della progressione per quoziente che è preceduto da $m+n$ termini; quindi si ha

$$log\, q^m \times q^n = (m+n)r = mr + nr,$$

ovvero

$$log\, q^m \times q^n = log\, q^m + log\, q^n.$$

386*. La dimostrazione precedente suppone che i numeri considerati facciano parte della stessa progressione per quoziente. Essa è in difetto per i logaritmi incommensurabili definiti (384). Per dimostrare che in questo caso la proposizione è ancora esatta, indichiamo con A e B i due numeri, di cui uno almeno non può essere introdotto nella progressione per quoziente. Inseriamo $p-1$ medi tra i diversi termini di ciascuna progressione. Sieno A', A'' i due termini consecutivi della nuova progressione per quoziente tra i quali A è compreso; sia-

no B' e B'' quelli fra i quali B è compreso. Il prodotto $A \times B$ sarà compreso tra $A' \times B'$ e $A'' \times B''$, e si avrà

$$\log A \times B > \log A' \times B', \qquad \log A \times B < \log A'' \times B'',$$
$$\log A + \log B > \log A' + \log B', \quad \log A + \log B < \log A'' + \log B''.$$

D'altra parte

$$\log A' \times B' = \log A' + \log B' \text{ e } \log A'' \times B'' = \log A'' + \log B'';$$

dunque

$$\log A \times B \text{ e } \log A + \log B$$

sono compresi l'uno e l'altro tra

$$\log A' + \log B' \text{ e } \log A'' + \log B''.$$

La differenza tra queste due somme è

$$\log A'' - \log A' + \log B'' - \log B';$$

ora $\log A'' - \log A' = \log B'' - \log B' = \frac{r}{p}$ (384); quindi quella differenza è eguale a $\frac{2r}{p}$. Si può dunque supporre p abbastanza grande perchè la detta differenza sia minore di qualunque numero dato. Da ciò risulta che non può esservi alcuna differenza assegnabile tra i numeri $\log A \times B$ e $\log A + \log B$.
Per conseguenza si ha

$$\log A \times B = \log A + \log B.$$

387. Osservazione. Il teorema precedente si applica a un numero qualunque di fattori. Abbiasi, per esempio, un prodotto di tre fattori $a \times b \times c$, si ha evidentemente:

$$\log (a \times b \times c) = \log (a \times b) \times c = \log(a \times b) + \log c$$
$$= \log a + \log b + \log c.$$

388. Teorema II. *Il logaritmo di una potenza di un numero è uguale al prodotto del logaritmo del numero per l'esponente della potenza.*

Questo teorema è una conseguenza dell'osservazione precedente. Sia, infatti, a^4 la potenza considerata, si ha

$$\log a^4 = \log a \times a \times a \times a = \log a + \log a + \log a + \log a$$
$$= 4 \log a.$$

La dimostrazione si applica evidentemente qualunque sia l'esponente; e quindi si ha in generale

$$\log a^m = m \log a,$$

qualunque sia m.

389. Teorema III. *Il logaritmo del quoziente di due numeri è eguale al logaritmo del dividendo meno quello del divisore.*

Sieno a e b i due numeri. Si ha identicamente

$$a = \frac{a}{b} \times b, \text{ da cui } \log a = \log \frac{a}{b} + \log b,$$

e per conseguenza

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b.$$

Osservazione. Nel teorema precedente si suppone che il quoziente $\frac{a}{b}$ sia maggiore di 1, giacchè i logaritmi dei numeri maggiori di 1 sono i soli che sieno stati definiti.

390. Teorema IV. *Il logaritmo della radice di un numero è uguale al logaritmo del numero diviso per l'indice della radice.*

Consideriamo la radice m^{esima} di un numero a. Si ha identicamente.

$$(\sqrt[m]{a})^m = a, \text{ da cui } m \log \sqrt[m]{a} = \log a,$$

e per conseguenza

$$log \sqrt[m]{a} = \frac{log\, a}{m}.$$

391. Osservazione. I quattro teoremi precedenti mostrano che una moltiplicazione può essere sostituita dall'addizione di due logaritmi; una divisione dalla sottrazione di due logaritmi, e infine l'estrazione di una radice d'ordine qualunque, dalla divisione del logaritmo del numero per l'indice della radice. Ma per trarre profitto da queste semplificazioni, bisogna saper trovare nelle tavole il logaritmo di un numero dato, e il numero corrispondente a un logaritmo dato.

Disposizione delle tavole dei logaritmi di Callet.

392. La sola ispezione di un numero fa conoscere la parte intera del suo logaritmo. Così i numeri di due cifre compresi fra 10 e 100 hanno logaritmi compresi tra 1 e 2, di cui la parte intera è 1. I numeri di tre cifre compresi fra 100 e 1000 hanno logaritmi compresi tra 2 e 3, di cui la parte intera è 2; e in generale, un numero di n cifre, essendo compreso tra 10^{n-1} e 10^{n}, il suo logaritmo è compreso tra $n-1$ e n, e la sua parte intera è per conseguenza $n-1$.

Giovandosi di questa osservazione si è fatto a meno di porre nelle tavole la parte intera, o come spesso si chiama, la *caratteristica* dei logaritmi.

393. La prima tavola è semplicissima: essa contiene i numeri naturali da 1 fino a 1200, disposti secondo il loro ordine in più colonne, a capo delle quali si vede la lettera *N*, iniziale della parola *numero;* accosto e alla destra di queste colonne se ne vedono altre, a capo delle quali è scritto *Log.*, iniziali della parola *logaritmi;* di modo che

ciascuna colonna di numeri è immediatamente seguita da una colonna di logaritmi, e ogni logaritmo è posto alla destra del numero al quale appartiene. Si è tralasciato di scrivere la caratteristica, perchè si conosce facilmente alla sola ispezione di un numero.

Questa tavola è chiamata *Chiliade I*, perchè infatti contiene i logaritmi del primo migliaio. (*Chiliade* è parola derivata dal greco, che significa riunione di mille unità.)

Le tavole seguenti sono un poco meno semplici della precedente; esse si estendono da 1020 fino a 108000. La prima colonna verso la sinistra, segnata *N*, contiene i numeri naturali da 1020 fino a 108000. La colonna seguente, segnata 0, offre i logaritmi che appartengono a questi numeri; di modo che l'insieme di queste due colonne forma il seguito della prima tavola, e dà immediatamente i logaritmi dei numeri da 1020 fino a 108000.

Osservando la colonna segnata 0, si vedranno verso la sinistra di questa colonna certi numeri isolati di tre cifre l'uno, che aumentano sempre di una unità, e che non sono a distanze eguali fra loro; e verso la destra della stessa colonna numeri di quattro cifre, i quali non lasciano intervallo fra loro; in guisa che si potrebbe credere che taluni logaritmi non abbiano che quattro cifre, mentre altri ne hanno sette.

Ma affinchè non vi sia errore, osserviamo che ogni numero isolato si considera come scritto al di sotto di se stesso, e dirimpetto a ciascuno dei numeri di quattro cifre che sono nella medesima colonna; quando dunque sulla stessa linea di un numero non si trovano che quattro cifre nella colonna segnata 0, bisogna scrivere alla sinistra di queste quattro cifre il numero isolato di tre cifre che si trova al disopra di esso. Al di là di 10000 i numeri isolati hanno quattro cifre.

Quando due numeri sono decupli l' uno dell' altro, i loro logaritmi hanno per differenza il logaritmo di 10 che è 1, e per conseguenza la loro parte decimale è la stessa; così l' insieme delle due prime colonne, di cui abbiamo parlato, dà anche di dieci in dieci i logaritmi dei numeri compresi tra 10200 e 108000. Per trovare i logaritmi intermedi, bisogna ricorrere alle colonne segnate 1, 2, 3, 4 ec. Queste colonne contengono le quattro ultime cifre decimali dei logaritmi dei numeri terminati dalle cifre che sono all' estremità superiore di queste colonne. Così la colonna segnata zero contiene le quattro ultime cifre decimali dei logaritmi dei numeri compresi tra 10200 e 108000 che sono terminati da uno zero, e inoltre i numeri isolati di cui abbiamo parlato, e che si considerano anche posti alla sinistra delle cifre che contengono le altre colonne. La colonna segnata 1 contiene le quattro ultime cifre dei logaritmi di tutti i numeri terminati da 1; la colonna segnata 2, quelli di tutti i numeri terminati da 2; la colonna segnata 3, quelli di tutti i numeri terminati da 3; e così di seguito sino a 9. Con questo mezzo si ha una tavola a doppia entrata, nella quale si comincia per consultare la prima colonna segnata *N*, e quando vi si sono trovate le quattro prime cifre del numero di cui si vuole avere il logaritmo, si segue con l' occhio la linea sulla quale si trovano, sino a che si giunga alla colonna all' estremità superiore della quale si trova l' ultima cifra del numero dato; allora si hanno sotto gli occhi le quattro ultime cifre del logaritmo cercato. Le tre prime sono date dal numero isolato che si trova più vicino e al disopra di esso nella seconda colonna.

L' ultima colonna contiene le differenze di due logaritmi consecutivi e le parti di queste differenze, cioè i prodotti di queste stesse differenze moltiplicate per

$\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \ldots,$ sino a $\frac{9}{10}$. Questi prodotti formano tante piccole tavole quante differenze vi sono. Ciascuna di queste piccole tavole si trova posta immediatamente al disotto della differenza di cui essa indica le parti.

Ma siccome verso il principio delle tavole queste differenze sono troppo numerose, e per conseguenza troppo vicine le une alle altre, non sarebbe stato possibile, quando avessero occupata una sola colonna, porre le piccole tavole delle parti nell' intervallo che si sarebbe trovato tra loro. È per questa ragione che si sono disposte prima su due colonne: la prima di queste differenze occupa la prima colonna; le due seguenti, senza uscire dalla linea orizzontale ove esse debbono essere situate, sono respinte a destra e occupano la seconda colonna; le due differenze che seguono si trovano sulla prima colonna, e le due seguenti sulla seconda; così di seguito. Nelle prime quattro pagine non si sono poste le tavole delle parti di queste differenze che di due in due.

Per rendere queste spiegazioni più chiare, riprodurremo una delle pagine delle tavole di Callet.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	DIFF.
7680	885 3612	3669	3725	3782	3838	3895	3951	4008	4065	4121	57
81	4178	4234	4291	4347	4404	4460	4517	4573	4630	4686	1 6
82	4743	4800	4856	4913	4969	5026	5082	5139	5195	5252	2 11
83	5308	5365	5421	5478	5534	5591	5647	5704	5761	5817	3 17
84	5874	5930	5987	6043	6100	6156	6213	6269	6326	6382	4 29
7685	6439	6495	6552	6608	6665	6721	6778	6834	6891	6947	5 29
86	7004	7060	7117	7173	7230	7286	7343	7399	7456	7512	6 34
87	7569	7625	7682	7738	7795	7851	7908	7964	8021	8077	7 40
88	8134	8190	8247	8303	8360	8416	8473	8529	8586	8642	8 46
89	8699	8755	8812	8868	8925	8981	9037	9094	9150	9207	9 51
7690	9263	9320	9376	9433	9489	9546	9602	9659	9715	9772	
91	9828	9885	9941	9998							
	886.				0054	0110	0167	0223	0280	0336	
92	0393	0449	0506	0562	0619	0675	0732	0788	0844	0901	
93	0957	1014	1070	1127	1183	1240	1296	1352	1409	1465	
94	1522	1578	1635	1691	1748	1804	1860	1917	1973	2030	
7695	2086	2143	2199	2256	2312	2368	2425	2481	2538	2594	
96	2651	2707	2763	2820	2876	2933	2989	3046	3102	3158	
97	3215	3271	3328	3384	3441	3497	3553	3610	3666	3723	
98	3779	3835	3892	3948	4005	4061	4118	4174	4230	4287	
99	4343	4400	4456	4512	4569	4625	4682	4738	4794	4851	
7700	4907	4964	5020	5076	5133	5189	5246	5302	5358	5415	
01	5471	5528	5584	5640	5697	5753	5810	5866	5922	5979	
02	6035	6092	6148	6204	6261	6317	6373	6430	6486	6543	
03	6599	6655	6712	6768	6824	6881	6937	6994	7050	7106	
04	7163	9219	7275	7332	7388	7445	7501	7557	7614	7670	
7705	7726	7783	7839	7896	7952	8008	8065	8121	8177	8234	
06	8290	8346	8403	8459	8515	8572	8628	8685	8741	8797	
07	8854	8910	8966	9023	9079	9135	9192	9248	9304	9361	
08	9417	9473	9530	9586	9642	9699	9755	9811	9868	9924	
09	9980										
	887.	0037	0093	0149	0206	0262	0318	0375	0431	0487	
7710	0544	0600	0656	0713	0769	0825	0882	0938	0994	1051	
11	1107	1163	1220	1276	1332	1389	1445	1501	1558	1614	
12	1670	1727	1783	1839	1895	1952	2008	2064	2121	2177	
13	2233	2290	2346	2402	2459	2515	2571	2627	2684	2740	
14	2796	2853	2909	2965	3022	3078	3134	3190	3247	3303	
7715	3359	3416	3472	3528	3584	3641	3697	3753	3810	3866	
16	3922	3978	4035	4091	4147	4204	4260	4316	4372	4429	
17	4485	4541	4598	4654	4710	4766	4823	4879	4935	4991	
18	5048	5104	5160	5217	5273	5329	5385	5442	5498	5554	
19	5610	5667	5723	5779	5835	5892	5948	6004	6060	6117	
7720	6173	6229	6286	6342	6398	6454	6511	6567	6623	6679	
21	6736	6792	6848	6904	6961	7017	7073	7129	7185	7242	
22	7298	7354	7410	7467	7523	7579	7635	7692	7748	7804	
23	7860	7917	7973	8029	8085	8142	8198	8254	8310	8366	
24	8423	8479	8535	8591	8648	8704	8760	8816	8872	8929	
7725	8985	9041	9097	9154	9210	9266	9322	9378	9435	9491	
26	9547	9603	9659	9716	9772	9828	9884	9941	9997		
	888.									0053	
27	0109	0165	0222	0278	0334	0390	0446	0503	0559	0615	
28	0671	0727	0784	0840	0896	0952	1008	1064	1121	1177	
29	1233	1289	1345	1402	1458	1514	1570	1626	1683	1739	
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

Uso delle tavole dei logaritmi.

394. PROBLEMA I. *Trovare il logaritmo di un numero qualunque mediante le tavole.*

Qualunque sia il posto che occupa nella serie decimale la prima cifra significativa di un numero, lo considereremo in prima come se fosse intero, e poi daremo al suo logaritmo una caratteristica conveniente.

Primo caso. — Se il numero dato è minore di 1200, lo troveremo nella prima chiliade, tra i numeri naturali che sono in alcune delle colonne segnate *N*. Il numero che troveremo alla sua destra, sulla medesima linea e nella colonna seguente, segnata log., sarà il suo logaritmo, dopo che gli avremo aggiunta la caratteristica che conviene a questo logaritmo, la quale è sempre eguale a 0, 1, 2, 3, 4, ec., secondo che la prima cifra significativa del numero esprime unità semplici, decine, centinaia, migliaia, ec.

Secondo caso. — Se il numero dato è compreso tra 1020 e 10800, lo cercheremo nella tavola che segue la prima chiliade, e avendolo trovato nella colonna *N*, consulteremo la colonna seguente segnata 0. Se accanto al numero naturale vediamo sette cifre, avremo subito la parte decimale del logaritmo cercato; ma se troviamo solamente quattro cifre, avremo le quattro ultime cifre della stessa parte decimale; poi osserveremo che alla loro sinistra vi ha un margine o spazio bianco; percorreremo questo margine andando verso l'estremità superiore della tavola, e il primo numero di tre cifre che incontreremo, darà le tre prime cifre della frazione decimale del logaritmo cercato. Scrivendo dunque questo numero alla sinistra delle quattro cifre che già abbiamo trovato, avremo un numero di sette cifre come

sopra: infine vi uniremo una caratteristica conveniente. Per esempio vicino a 7680 trovo 8853612 sulla stessa linea e nella colonna segnata 0; ho dunque ad un tratto la parte decimale del logaritmo che cerco; altro non mi resta che unirvi la caratteristica 3. Se il numero fosse 7,680, la caratteristica sarebbe zero; sarebbe 1 se il numero fosse 76,80; 2, se fosse 768,0. Vicino a 7695, nella colonna segnata 0, trovo solamente 2086; percorro il margine, e il primo numero che trovo salendo è 886; dunque il logaritmo del numero proposto è 3,8862086. Se il numero avesse cinque cifre e fosse minore di 10800, il suo logaritmo si troverebbe nello stesso modo.

Terzo caso. — Se il numero è compreso tra 10200 e 108000, cioè se ha cinque cifre significative, non faremo conto per un momento dell'ultima, e cercheremo, come sopra, il numero formato dalle quattro prime. Seguiremo con l'occhio la linea sulla quale l'abbiamo trovato, percorrendola da sinistra a destra sino a che giungeremo nella colonna all'estremità superiore della quale è scritta la quinta cifra che abbiamo lasciata da parte. Le quattro cifre che si trovano contemporaneamente nella linea delle quattro prime cifre del numero dato, e nella colonna che corrisponde alla quinta, esprimeranno le quattro ultime cifre decimali del logaritmo di questo numero. Le tre prime cifre si troveranno come sopra. Proponiamoci per esempio di trovare il logaritmo di 772,37; cerco 7723 nella colonna segnata *N;* accanto nello spazio bianco non trovo nulla, ma un poco più alto trovo 887 in questo margine; percorro la linea del numero 7723 e mi arresto alla colonna segnata 7, sulla quale e nella linea di 7723 trovo 8254. La parte decimale del logaritmo del numero proposto è dunque 0,8878254, e questo logaritmo è 2,8878254. Se il

numero fosse compreso tra 102000 e 108000, il suo logaritmo si troverebbe al modo stesso.

395. Le spiegazioni precedenti danno il mezzo di trovare il logaritmo di un numero intero minore di 108000 e quello di un numero decimale, le cui cifre, senza tener conto della virgola, esprimono un numero inferiore a questo limite. Per trovare il logaritmo di un numero che oltrepassa questo limite, separeremo alla sinistra di questo numero, mediante una virgola, tante cifre quante ne bisognano per formare un numero minore di 108000 e grande quanto più è possibile. Il numero proposto prende allora la forma di un numero decimale. Indichiamo con n la parte intera, con d la parte decimale; e sieno l la parte decimale del logaritmo di n e δ la differenza dei logaritmi dei numeri n ed $n+1$. Stabiliremo la proporzione $1 : d :: \delta : x$, da cui $x = d \times \delta$. Il valore di x rappresenta ciò che bisogna aggiungere ad l per avere la parte decimale del logaritmo di $n+d$ che è anche quella del logaritmo del numero dato. La caratteristica si determina nel modo detto innanzi.

La regola precedente si fonda sul seguente principio:

Se ad un numero N si danno successivamente due piccoli accrescimenti, il rapporto di questi accrescimenti è eguale al rapporto degli accrescimenti corrispondenti del logaritmo di N.

Questo principio non è rigorosamente esatto, ma si dimostra, mediante considerazioni che non possono essere svolte in questo trattato, che l'errore risultante dalla sua applicazione non può in generale avere influenza sulla settima cifra decimale del logaritmo che si calcola, purchè, come noi lo supponiamo, i piccoli accrescimenti del numero non eccedano una unità, e che questo numero sia almeno eguale a 10000.

Potremo fare a meno di formare direttamente il

prodotto $d \times \delta$; infatti i prodotti di δ per ciascheduna delle cifre di d si trovano nella piccola tavola delle parti che è posta immediatamente al di sotto di questa differenza nell' ultima colonna a destra.

Esempio. Vogliasi trovare il logaritmo del numero 76807753.

Si ha $n = 76807$, $d = 0,753$. Si cerca il logaritmo di n, e si trova per la sua parte decimale il numero $l = 0,8854008$. La parte decimale del logaritmo di $n+1$, cioè di 76808 è 0,8854065; la differenza fra questo logaritmo e quello di n è $\delta = 57$ dieci milionesimi; dunque $x = d \times \delta = 0,753 \times 57$.

Nella moltiplicazione di 57 per 0,753 dovremo prendere la sola parte intera del prodotto, giacchè la parte decimale esprimerebbe al più decimi di unità del settimo ordine, cioè unità dell' ottavo ordine, che trascuriamo nel valore dei logaritmi.

Per moltiplicare 57 per 0,753, lo moltiplicheremo successivamente per 7, 5 e 3; questi prodotti li troviamo già calcolati nella tavola posta al di sotto di 57 nell' ultima colonna a destra, ove sono ridotti alle cifre che si debbono conservare, supponendo che il moltiplicatore esprima decimi. Così, accanto a 7 si trova 40, invece di 39,9 che sarebbe il prodotto esatto; accanto a 5 si trova 29 invece di 28,5; accanto a 3 si trova 17 invece di 17,1. Nell' esempio attuale, 5 esprimendo centesimi, il prodotto corrispondente sarà 2,9; 3 esprimendo millesimi, il prodotto corrispondente sarà 0,17.

Il valore di x, $57 \times 0,753$, sarà quindi $40+2,9+0,17$, ovvero 43,07, al quale sostituiremo 43; e per avere il logaritmo domandato dovremo aggiungere al logaritmo di 76807, 43 unità del settimo ordine; e quindi, osservando che il numero proposto ha otto cifre, il suo logaritmo sarà 7,8854051.

Il calcolo si dispone nel modo seguente:

log 76807		0,8854008
Per	0,7	40
Per	0,05.	29
Per	0,003. . . .	17
log 76807 753. . . .		7,8854051

Esempio II. Vogliasi trovare il logaritmo di 510878932. Operando come si è indicato, troviamo

log 51087		0,7083104
Per	0,8.	68
Per	0,09.	77
Per	0,003. . . .	26
Per	0,0002. . .	17
log 51087 8932. . .		8,7083180.

Da questo esempio si vede che il valore delle due ultime cifre del numero dato non ha alcuna influenza sulle prime sette cifre decimali del suo logaritmo. In generale, quando dovremo separare più di tre cifre alla destra del numero dato perchè la parte a sinistra non superi 108000, potremo considerare eguali a zero le cifre che seguono la terza.

396. Problema II. *Trovare il numero corrispondente a un logaritmo dato.*

Primo caso. — Se il logaritmo è tra quelli della prima chiliade, troveremo immediatamente il numero corrispondente nella colonna segnata *N* che precede immediatamente quella che contiene il logaritmo dato, e nella stessa linea di questo logaritmo.

Secondo caso. — Se il logaritmo non si trova nella prima tavola, cercheremo le prime tre cifre decimali di questo logaritmo tra i numeri isolati che si vedono

nella colonna segnata 0, e avendole trovate, cercheremo le quattro ultime cifre del logaritmo tra i numeri di quattro cifre che sono al di sotto in questa stessa colonna. Se troviamo queste quattro ultime cifre, il numero cercato sarà nella colonna segnata *N*, e nella loro linea.

Terzo caso. — Se nella colonna segnata 0 non si trovano le quattro ultime cifre del logaritmo dato, ci arresteremo a quelle che ne approssimano più *in meno;* seguiremo la linea sulla quale ci saremo fermati, percorrendola da sinistra verso destra; e se in questa linea troviamo le quattro ultime cifre del logaritmo dato, guarderemo l'estremità superiore o inferiore della colonna, nella quale le abbiamo trovate; la cifra che troveremo in queste estremità sarà la quinta cifra del numero cercato, le cui prime quattro si troveranno come sopra nella colonna segnata *N*.

Vogliasi per esempio trovare il numero corrispondente al logaritmo 3,8871276. Cerco 887 tra i numeri isolati della colonna segnata 0; percorro la medesima colonna andando verso l'estremità inferiore, e trovo che **1107** si approssima più *in meno* a **1276**; seguo la linea che comincia con **1107** e veggo **1276** in questa linea; all'estremità superiore di questa colonna trovo la cifra **3**; ritorno a **1276** e veggo che la linea nella quale è, corrisponde al numero **7711**; scrivo questo numero, e alla sua destra la cifra **3** che abbiamo già trovata; e si ha **7711,3**, che è il numero che cercavamo.

Quarto caso. — Se il logaritmo dato non si trova in nessuno dei casi precedenti, per avere il numero corrispondente cercheremo, come sopra, il logaritmo *prossimamente minore.* Rappresentiamo con l la parte decimale di questo logaritmo approssimato, con n il numero intero corrispondente, con l' la parte decimale del logaritmo

dato, con δ la differenza dei logaritmi di n e di $n+1$, in fine con δ' la differenza $l'-l$. Stabiliremo la proporzione $\delta : \delta' :: 1 : x$, da cui $x = \frac{\delta'}{\delta}$. Il valore di x ridotto in decimali è ciò che dovremo aggiungere al numero n per ottenere un numero il cui logaritmo abbia la stessa parte decimale del logaritmo dato.

Esempio. Debbasi cercare il numero corrispondente al logaritmo 4,8870279. Si ha $l' = 0{,}8870279$; trovo $l = 0{,}8870262$ che corrisponde al numero $n = 77095$, $\delta = 57$ dieci milionesimi, $\delta' = 17$ dieci milionesimi. Quindi ho $x = \frac{\delta'}{\delta} = \frac{17}{57} = 0{,}29$; e per conseguenza il numero cercato è 77095,29.

Le piccole tavole delle differenze possono agevolare la riduzione in decimali delle frazioni che rappresentano i valori di x. Nel nostro caso, consultando la tavola delle parti, trovo che a 17 corrisponde 3; si ha dunque $\frac{17}{57} = 0{,}3$.

Per dare un secondo esempio, supponiamo che si voglia trovare il numero corrispondente al logaritmo 0,4971499. Trovo $l = 0{,}4971371$, $n = 31415$, $\delta = 138$, $\delta' = 128$. Quindi $x = \frac{128}{138}$. Per ridurre in decimali questa frazione consulto la tavola delle parti e veggo che la parte che più si avvicina a 128 è 124, che corrisponde alla cifra 9. Dunque

$$\frac{128}{138} = 0{,}9 + \frac{128-124}{138} = 0{,}9 + \frac{40}{138} \times 0{,}1.$$

Fra le parti di 138 non trovo 40 ma 41 che non differisce da 40 che per un'unità, e che corrisponde

alla cifra 3. Posso dunque prendere 0,3 invece di $\frac{40}{138}$, e per conseguenza ho, a meno di 0,01,

$$\frac{128}{138}=0,9+0,3\times0,1=0,93.$$

Il numero cercato è quindi 3, 141593.

Il calcolo si dispone ordinariamente nel seguente modo:

	0,4971499	
Per	0,4971371	31415
1° *resto*	128	09
2° *resto*	40	003
numero cercato		3,141593.

Applicazioni della teoria dei logaritmi.

397. Quando un numero incognito risulta da moltiplicazioni, divisioni, estrazioni di radici o elevazioni a potenze effettuate sopra numeri dati, per determinare il suo valore, si cerca quello del suo logaritmo, che risulta da operazioni molto più semplici. Allorchè il logaritmo è conosciuto, il numero si determina come si è detto (394).

398. Osservazione. In conseguenza delle nostre definizioni, perchè un numero si possa calcolare per logaritmi è necessario: 1° che i numeri sui quali si opera sieno maggiori di 1; 2° che il risultato dell' operazione sia esso stesso maggiore di 1.

Si può sempre fare in modo che la prima condizione sia sodisfatta. Supponiamo, infatti, che uno dei numeri a che si tratta di combinare mediante moltiplicazione, divisione, ec., sia minore di 1; si osserverà che la moltiplicazione e la divisione per a equivalgono alla

divisione e alla moltiplicazione per $\frac{1}{a}$, numero maggiore di 1 e che, per conseguenza, ha un logaritmo.

Si può anche osservare che un numero minore di 1 può esser posto sotto la forma $\frac{a}{b}$; ove a e b indicano numeri maggiori di 1; per conseguenza, la moltiplicazione per $\frac{a}{b}$ si riduce alla moltiplicazione per a e alla divisione per b; similmente, la divisione per $\frac{a}{b}$ si riduce alla moltiplicazione per b e alla divisione per a.

Per sodisfare alla seconda condizione, se il numero da calcolare è minore di 1, si moltiplica per una potenza di 10 il cui esponente n è indeterminato e talmente grande che il prodotto risulti maggiore di 1. Si prende poi il logaritmo del prodotto, si cerca il numero corrispondente, e si divide il risultato per 10^n.

Esempio I. Calcolare il prodotto

$$x = 3{,}141593 \times 0{,}98696.$$

Il moltiplicatore è minore di 1 e può scriversi sotto la forma $\frac{9{,}8696}{10}$. Si ha dunque

$$x = \frac{3{,}141593 \times 9{,}8696}{10};$$

e poichè x è evidentemente maggiore di 1, si ha

$$\log x = \log 3{,}141593 + \log 9{,}8696 - 1.$$

Il calcolo si dispone nel seguente modo:

$\log$ 3,141593	0,4971499
$\log$ 9,8696	0,9942996
$\log x$	0,4914495,
x	3,100628

Esempio II. Calcolare il quoziente

$$x = 0{,}3183098 : 0{,}98696.$$

Il dividendo e il divisore sono entrambi minori di 1; moltiplicandoli l'uno e l'altro per 10, si ha

$$x = \frac{3{,}183098}{9{,}8696};$$

e poichè x è < 1, scriveremo

$$x \times 10^n = \frac{10^n \times 3{,}183098}{9{,}8696};$$

da cui

$$\log x \times 10^n = n + \log 3{,}183098 - \log 9{,}8696.$$

Ecco il modo con cui si dispone il calcolo:

$n + \log 3{,}183098$ ..	$n + 0{,}5028499$
$\log 9{,}8696$	$0{,}9942996$
$\log x \times 10^n$	$n - 1 + 0{,}5085503$
$x \times 10^n$	$0{,}3225152 \times 10^n$
x	$0{,}3225152.$

Esempio III. Calcolare l'espressione

$$x = \sqrt[3]{\tfrac{1}{375} \times 0{,}5142.}$$

Si ha

$$x = \sqrt[3]{\tfrac{1}{375} \times \tfrac{5142}{10000}} = \frac{\sqrt[3]{5142}}{\sqrt[3]{375 \times 10000}} = \frac{1}{\sqrt[3]{375 \times \frac{10000}{5142}}};$$

e quindi

$$x \times 10^n = \frac{10^n}{\sqrt[3]{375 \times \frac{10000}{5142}}};$$

da cui

$$\log x \times 10^n = n - \frac{1}{3}\left(\log 375 + \log \frac{10000}{5142}\right).$$

$log\frac{10000}{5142}$ è eguale a $4-log\,5142$; si ha dunque

$$log\,x\times10^{n}=n-\frac{1}{3}(log\,375-log\,5142+4).$$

L'operazione si dispone nel modo seguente

$n+\frac{1}{3}\,log\,5142$ . . .	$n+1,2370440$
$\frac{1}{3}(4+log\,375)$	$2,1913437$
$log\,x\times10^{n}$	$n-1+0,0457003$
$x\times10^{n}$	$0,1110965\times10^{n}$
x	$0,1110965$

399.* Osservazione. Quando un calcolo esige che si aggiungano molti logaritmi e che dalla somma si tolgano altri logaritmi, è utile fare uso del complemento aritmetico (205). A noi basterà darne un esempio.

Calcolare l'espressione

$$x=\frac{239\times827\times543}{76\times17}.$$

$log\,239=2,3783979$
$log\,827=2,9175055$
$log\,543=2,7347998$
$com\,log\,76=8,1191864$
$com\,log\,17=8,7695511$
$log\,x=4,9194407$
$x=83069,32$

Differenti sistemi di logaritmi.

400. Si possono scegliere a volontà due progressioni per differenza e per quoziente, che comincino l'una per 0, l'altra per l'unità; esse forniranno un sistema di logaritmi che godrà di tutte le proprietà dimostra-

te (385). Un sistema di logaritmi si definisce ordinariamente indicando qual è il numero che ha 1 per logaritmo. Questo numero è detto la *base* del sistema di logaritmi. Questi sistemi in numero infinito, sono legati gli uni agli altri da una legge semplicissima che risulta dal teorema seguente:

TEOREMA. *Il rapporto dei logaritmi di due numeri, è lo stesso in tutti i sistemi.*

Siano infatti A e B due numeri qualunque, ed $\frac{m}{n}$ la frazione a termini interi che, nel sistema che ha per base B, rappresenta il rapporto dei loro logaritmi; si avrà

$$\frac{\log A}{\log B}=\frac{m}{n},$$

e per conseguenza

$$n \log A = m \log B,$$

ovvero

$$\log A^n = \log B^m;$$

da cui si deduce

$$A^n = B^m.$$

Prendiamo ora i logaritmi dei due numeri A^n e B^m nel sistema che ha per base B', e che indicheremo con $\log'$, si ha

$$\log' A^n = \log' B^m$$

e per conseguenza

$$n \log' A = m \log' B,$$

da cui

$$\frac{\log' A}{\log' B}=\frac{m}{n}.$$

Il rapporto dei due logaritmi è dunque, in un sistema qualunque, lo stesso che nel sistema primitivo.

401*. Osservazione I. La dimostrazione precedente suppone che il rapporto dei due logaritmi considerato sia commensurabile. Se il rapporto $\frac{\log A}{\log B}$ è un numero incommensurabile, si valuterà questo numero a meno di $\frac{1}{n}$. Sieno $\frac{m}{n}$ e $\frac{m+1}{n}$ i valori approssimati ottenuti, avremo

$$\frac{\log A}{\log B} > \frac{m}{n}, \quad \text{e} \quad \frac{\log A}{\log B} < \frac{m+1}{n},$$

ovvero

$$n \log A > m \log B, \quad \text{e} \quad n \log A < (m+1) \log B,$$

cioè

$$\log A^n > \log B^m, \quad \text{e} \quad \log A^n < \log B^{m+1};$$

per conseguenza

$$A^n > B^m, \quad \text{e} \quad A^n < B^{m+1}.$$

Prendiamo ora i logaritmi nel sistema la cui base è B', si ha

$$\log' A^n > \log' B^m, \quad \text{e} \quad \log' A^n < \log' B^{m+1},$$

ovvero

$$n \log' A > m \log' B, \quad \text{e} \quad n \log' A < (m+1) \log' B;$$

per conseguenza

$$\frac{\log' A}{\log' B} > \frac{m}{n}, \quad \text{e} \quad \frac{\log' A}{\log' B} < \frac{m+1}{n}.$$

I due rapporti $\frac{\log A}{\log B}$ e $\frac{\log' A}{\log' B}$ sono dunque compresi l'uno e l'altro tra le due frazioni $\frac{m}{n}$ e $\frac{m+1}{n}$, la cui

differenza $\frac{1}{n}$ può essere minore di qualunque numero dato. Per conseguenza, non potrebbe esservi alcuna differenza assegnabile tra i due rapporti di cui si tratta.

402. Osservazione II. Dal teorema precedente si ha

$$\frac{\log A}{\log B} = \frac{\log' A}{\log' B},$$

da cui

$$\frac{\log' A}{\log A} = \frac{\log' B}{\log B}.$$

Il rapporto $\frac{\log' A}{\log A}$ è dunque indipendente dal numero A; indicandolo con k, si ha

$$\log' A = k \log A, \qquad \log' B = k \log B;$$

cioè, che *per ottenere i logaritmi dei differenti numeri in un sistema qualunque, bisogna moltiplicare per un numero costante i logaritmi presi in un altro sistema.*

403*. Osservazione III. Per determinare il numero k, basta conoscere il logaritmo della base B nel sistema B', o il logaritmo della base B' nel sistema B. Si ha, infatti,

$$k = \frac{\log' B}{\log B}, \quad \text{o} \quad k = \frac{\log' B'}{\log B'};$$

e poichè $\log B = 1$, $\log' B' = 1$; dunque

$$k = \log' B, \quad \text{o} \quad k = \frac{1}{\log B'}.$$

404. Da ciò che precede risulta che le tavole calcolate pel caso della base 10 permettono di calcolare un logaritmo in un sistema qualunque. Sia proposto, per esem-

pio, di calcolare il logaritmo di 7698 nel sistema che ha per base 12. Nelle tavole di Callet si trova

$$log\,12 \quad = 1{,}07918125,$$
$$log\,7698 = 3{,}8863779.$$

Si ha quindi

$$k = \frac{1}{1{,}07918125},$$

e per conseguenza

$$log'\,7698 = \frac{3{,}8863779}{1{,}07918125}.$$

405. Reciprocamente, conoscendo il logaritmo di un numero qualunque, si può trovare la base del sistema. Cerchiamo, per esempio, qual è la base del sistema nel quale il logaritmo di 25 è 0,78321.

Indichiamo con B' la base ignota. Si ha nel sistema la cui base è 10,

$$log\,25 = 1{,}39794001;$$

quindi

$$k = \frac{0{,}78321}{1{,}39794001},$$

e per conseguenza

$$log\,B' = \frac{1{,}39794001}{0{,}78321}.$$

Trovato il logaritmo di B', il valore di B' si ottiene immediatamente.

Esercizi.

I. Qual è la base di un sistema di logaritmi nel quale 6 è il logaritmo di 729?

II. Quali sono le basi commensurabili tali che il logaritmo di 20 sia commensurabile?

III. Una corda di rame avente $0^m,363$ di lunghezza e $0^m,0015$ di diametro, quando è tesa da un peso di $13^{ch},35$, eseguisce in un secondo un numero di vibrazioni trasversali eguale a

$$\frac{1}{2\times 0,363\times 0,0015}\sqrt{\frac{9,8088\times 13,55}{3,416\times 8,8}};$$

si domanda di calcolare questo numero.

IV. Se si rappresenta col segno $P(x)$ il prodotto di tutti i numeri primi minori di x, si ha, qualunque sia il numero intero x,

$$\begin{aligned} log\,(1,2,3,4\ldots . x) = & \; log\,P(x) + log\,P\left(\frac{x}{2}\right) + log\,P\left(\frac{x}{3}\right) + \ldots . \\ & + log\,P(\sqrt{x}) + log\,P\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) + log\,P\left(\frac{\sqrt{x}}{3}\right) + \ldots . \\ & + log\,P(\sqrt[3]{x}) + log\,P\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{2}\right) + \ldots . \\ & + log\,P(\sqrt[4]{x}) + log\,P\left(\frac{\sqrt[4]{x}}{2}\right) + \ldots . \\ & + \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \end{aligned}$$

CAPITOLO XVII.

DELLE MISURE.

Sistema metrico francese.

406. Le principali grandezze che considerano le matematiche sono le *lunghezze*, le *superficie*, i *volumi*, i *pesi*. Le unità o *misure* adoperate dai geometri e dai fisici sono anche quelle di cui si fa ora uso esclusivamente in Francia per gli usi volgari; il loro insieme costituisce il *sistema metrico*, o sistema delle nuove misure.

I lavori dei dotti incaricati dello stabilimento del sistema metrico furono terminati nel 1799, e il 22 giugno dello stesso anno i prototipi del *metro* e del *chilogrammo* (unità di lunghezza e di peso) furono deposti negli archivi della Repubblica.

Misure di lunghezza.

407. L'unità di lunghezza ha ricevuto il nome di *metro*. È questa l'unità *fondamentale* dalla quale derivano le unità impiegate per la misura di tutte le altre grandezze.

Il metro è la diecimilionesima parte del quarto del meridiano terrestre, cioè della distanza del polo all'equatore terrestre, misurata sulla superficie dell'oceano.

Il *campione* deposto agli Archivi è una verga di platino, e dà la lunghezza *legale* del metro quando è alla temperatura del ghiaccio fondente.

Le misure di lunghezza si trovano nella seguente tavola.

NOMI.	VALORI.
Miriametro.	Diecimila metri.
Chilometro.	Mille metri.
Ettometro.	Cento metri.
Decametro.	Dieci metri.
Metro.	Diecimilionesima parte del quarto del meridiano terrestre.
Decimetro.	Decimo del metro.
Centimetro.	Centesimo del metro.
Millimetro.	Millesimo del metro.

408*. Osservazione. Le misure itinerarie sono il miriametro e il chilometro; il miriametro è contenuto mille volte e il chilometro diecimila volte nel quarto del meridiano terrestre. Se la circonferenza si suppone divisa in 400 *gradi*, il grado in 100 *minuti*, il minuto in 100 *secondi*, il quarto di meridiano contiene 100 gradi, ovvero 10000 minuti, ovvero 1000000 secondi; e quindi il grado equivale a 100000 metri o a dieci miriametri, il minuto equivale a 1000 metri o ad un chilometro, il secondo equivale a 10 metri o ad un decametro. Il miriametro è anche equivalente a 10 minuti.

Nell' agrimensura si adopera una catena lunga un decametro.

Misure di superficie.

409. Si chiama *metro quadrato* un quadrato di cui ciascun lato ha 1 metro di lunghezza. Similmente, un *decimetro quadrato*, un *centimetro quadrato* ec., sono quadrati che hanno per lato 1 decimetro, 1 centimetro ec.

Le misure di superficie si trovano nella seguente tavola:

NOMI.	VALORI.
Miriametro quadrato.	Cento milioni di metri quadrati.
Chilometro quadrato.	Milione di metri quadrati.
Ettometro quadrato o Ettara.	Decimila metri quadrati.
Decametro quadrato o Ara.	Cento metri quadrati.
Metro quadrato o Centiara.	Unità principale.
Decimetro quadrato.	Centesima parte del metro quadrato.
Centimetro quadrato.	Diecimillesima parte del metro quadrato.
Millimetro quadrato.	Milionesima parte del metro quadrato.

Osservazione. L'ara, l'ettara e la centiara sono le sole misure agrarie attualmente impiegate.

Misure di volume o di capacità.

410. Si chiama *metro cubo* un cubo di cui ciascuna costola ha 1 metro di lunghezza. Similmente, un *decimetro cubo*, un *centimetro cubo*, ec., sono cubi che hanno per costola 1 decimetro, 1 centimetro, ec. E al modo stesso un *decametro cubo*, un *ettometro cubo*, ec., sono cubi aventi per costola 1 decametro, 1 ettometro, ec. Le unità di volume sono:

il *millimetro cubo*, che è la millesima parte del centimetro cubo.

il *centimetro cubo*, che è la millesima parte del decimetro cubo;

il *decimetro cubo*, che è la millesima parte del metro cubo;

il *metro cubo*, unità principale;
il *decametro cubo*, che vale mille metri cubi;

. . . .

I multipli del metro cubo sono poco usati.
Le misure di volume si trovano nella seguente tavola:

Misure di capacità pe' liquidi e per gli aridi.	
NOMI.	VALORI.
Chilolitro. Ettolitro. Decalitro. Litro. Decilitro. Centilitro.	Mille litri. Cento litri. Dieci litri. Decimetro cubo. Decimo del litro. Centesimo del litro.
Misure di volume.	
Decastero. Stero. Decistero.	Dieci steri. Metro cubo. Decimo dello stero.

Osservazione. Il metro cubo prende il nome di *stero* allora soltanto quando è destinato alla misura del legname.

Per la misura dei liquidi si fa uso di vasi cilindrici di stagno la cui altezza è doppia del diametro; le capacità di questi vasi sono: 1 *litro*, 5 *decilitri*, 2 *decilitri*, 1 *decilitro*, 5 *centilitri*, 2 *centilitri*, 1 *centilitro*.

Per la misura dei grani, si fa uso di vasi cilindrici di legno la cui altezza è uguale al diametro; le capacità di questi vasi sono: 1 *ettolitro*, 5 *decalitri*, 2 *decalitri*,

1 *decalitro,* 5 *litri,* 2 *litri,* 1 *litro,* 5 *decilitri,* 2 *decilitri,* 1 *decilitro.*

Misure di pesi.

411. L'unità di peso è il *grammo;* peso, nel vuoto, di 1 centimetro cubo di acqua distillata alla temperatura di 4 gradi centigradi. A questa temperatura l'acqua raggiunge la sua densità massima.

Le misure di pesi si trovano nella seguente tavola:

NOMI.	VALORI.
Tonnellata.	Mille chilogrammi, peso del metro cubo di acqua distillata alla temperatura di 4 gradi centigr.
Quintale metrico.	Cento chilogrammi.
Chilogrammo.	Mille grammi. Peso del litro.
Ettogrammo.	Cento grammi.
Decagrammo.	Dieci grammi.
Grammo.	Peso di un centimetro cubo di acqua a 4 gradi centigradi.
Decigrammo.	Decimo del grammo.
Centigrammo.	Centesimo del grammo.
Milligrammo.	Millesimo del grammo.

Osservazione. È facilissimo convertire in grammi un peso qualunque espresso mediante queste diverse unità. Per esempio 613 tonnellate, 8 quintali, 55 chilogrammi, 815 grammi possono rappresentarsi con chilogrammi 613855^{ch},815.

Monete.

412. L'unità monetaria è il *franco.* Il franco è un pezzo d'argento che pesa 5 grammi, sui quali vi ha il

dieci per cento di rame; quindi il franco contiene solamente 4^{g},50 di argento puro.

Il franco si divide in dieci decimi, il decimo in dieci centesimi.

I multipli del franco non hanno ricevuto nomi particolari.

Le monete di oro sono: la moneta di 40 franchi, che pesa gr. 12,90322; la moneta di 20 franchi che pesa gr. 6,45161; infine la moneta di 10 franchi, che pesa gr. 3,22580.

Le monete di argento sono: la moneta di 5 franchi, che pesa 25 grammi; la moneta di 2 franchi, che pesa 10 grammi; la moneta di 1 franco, che pesa 5 grammi; la moneta di 50 centesimi, che pesa gr. 2,50; la moneta di 25 centesimi, che pesa gr. 1,25; la moneta di 20 centésimi che pesa 1 grammo.

Le monete di rame sono: la moneta di 10 centesimi, che pesa 20 grammi; la moneta di 5 centesimi che pesa 10 grammi; la moneta di 1 centesimo, che pesa 2 grammi.

Il valore legale delle monete di oro è quindici volte e mezzo quello delle monete di argento, sotto lo stesso peso. Il valore legale delle monete di rame è il quarantesimo di quello delle monete di argento sotto lo stesso peso.

Calcolo delle misure francesi.

413. Le unità di dieci in dieci volte più grandi, e di dieci in dieci volte più piccole del sistema delle nuove misure francesi rappresentano le unità dei differenti ordini impiegate nella numerazione decimale. Quindi i calcoli si effettuano con una facilità eguale a quella che risulta dall' uso esclusivo di una sola unità. Infatti, è facilissimo riferire all' unità principale una grandezza espressa mediante i suoi multipli e i suoi summultipli.

Esempio. 8 miriametri, 9 chilometri, 7 ettometri, 3 decametri, 1 metro, 3 centimetri, possono rappresentarsi con $89731^m,03$.

Reciprocamente, un numero intero seguito da una frazione decimale che rappresenta una grandezza riferita a una delle unità, può decomporsi, senza alcun calcolo, in un piccolo numero di unità semplici di ciascun ordine.

Esempio. $522^{ch},827925$ possono leggersi 522 chilogrammi, 827 grammi, 925 milligrammi; basta ricordarsi che il chilogrammo vale mille grammi, e il grammo mille milligrammi.

Si può anche cambiare l' unità alla quale una grandezza è riferita mediante un semplice spostamento della virgola. Bisogna spostarla di tanti posti verso la destra o verso la sinistra, quante unità vi sono nell' esponente della potenza di 10 che indica quante volte la prima unità è contenuta nella seconda o la seconda nella prima.

Esempio. $8^{mc},35$ valgono 8350 decimetri cubi e 0,00835 decametri cubi.

414. La valutazione delle grandezze mediante le nuove misure, dando sempre luogo a numeri interi seguiti da frazioni decimali, i calcoli relativi alle grandezze espresse a questo modo, si faranno sempre sopra numeri decimali. È questo uno dei principali vantaggi del nuovo sistema.

Esempi. 1°. Sommare 25 are, 2 ettàri 79 are, e 3 ettari 2 are 35 centiare.

$$\begin{array}{r} 25 \\ 279 \\ 302,35 \\ \hline 606,35 \end{array}$$

La somma e 6 ettari, 6 are, 35 centiare.

2°. Una cassa piena pesa 78 chilogrammi 78 decagrammi; la stessa cassa vuota pesa 5 chilogrammi, 3 decagrammi, 1 grammo. Qual è il peso della mercanzia che conteneva?

$$\begin{array}{r} 78^{ch},78 \\ 5\phantom{^{ch}},031 \\ \hline 73\phantom{^{ch}},749 \end{array}$$

Sottraendo da $78^{ch},78$, peso della cassa piena, $5^{ch},031$, peso della cassa vuota, si trova $73^{ch},749$ cioè 73 chilogrammi, 74 decagrammi, 9 grammi.

3°. Il peso di un ettolitro di carbone è $82^{ch},7$; un sacco di carbone contiene 1 ettolitro 42 litri, qual è il peso di 3227 sacchi?

Per avere il volume di carbone, bisogna moltiplicare 3227 per $1^{ett},42$.

$$\begin{array}{r} 3,227 \\ 1,42 \\ \hline 4582,34 \end{array}$$

Si trova per prodotto 4582,34, cioè 4582 ettolitri, 34 litri. Il peso di un ettolitro essendo $82^{ch},7$, per avere il peso di un numero qualunque di ettolitri, bisogna moltiplicare questo numero per 82,7.

$$\begin{array}{r} 4582,34 \\ 82,7 \\ \hline 378959,518 \end{array}$$

Il peso richiesto è dunque $378959^{ch},518$, cioè 578959 chilogrammi, 518 grammi.

Osservazione. Quando la moltiplicazione si effettua fra numeri che rappresentano lunghezze come 42 metri e 56 metri, il prodotto 2352 rappresenta metri qua-

drati, cioè 23 are e 52 metri quadrati. Se si dovesse moltiplicare 42 metri per 56 metri e per 12 metri, il prodotto 28244 rappresenterebbe metri cubi, cioè 28 decametri cubi e 244 metri cubi. (Vedi *Geometria*).

4°. Un vetturale ha condotto 753 steri di legname in un carro che contiene 2 steri, 4 decisteri. Quanti viaggi ha egli fatto?

È evidente che per avere il numero dei viaggi, bisogna dividere 753 per 2,4: o (208) 7520 per 24:

```
7530 | 24
 33  |313
  90
  18
```

Il numero dei viaggi è 313. Se i dati fossero rigorosi, vi bisognerebbe un ultimo viaggio per portare 18 decisteri. Ma gli elementi della questione non comportano una simile precisione nella risposta.

Misure toscane.

415*. L'unità di lunghezza è il *braccio*. Il braccio si divide in 20 *soldi;* il soldo in 12 *denari*. Vi è pure la canna *agrimensoria* la quale si compone di 5 braccia.

Per le misure itinerarie si fa uso del *miglio*, equivalente a braccia 2833 $\frac{133}{1000}$.

L'unità di superficie è generalmente il *braccio quadro*, che contiene 400 *soldi quadri*, di 144 *denari quadri* ciascuno.

Per le misure agrarie v'ha il *quadrato;* esso si divide in 10 *tavole;* la tavola si divide in 18 *pertiche;* la pertica in dieci *deche;* e la deca è di 10 braccia quadre. In addietro nelle provincie fiorentina e pisana facevasi uso per le misure agrarie dello *stioro*. Lo stioro fioren-

tino si componeva di 12 *panora;* il panoro di 12 *pugnora;* ed il pugnoro di 12 braccia quadre e 12 diciassettesimi di braccio. Lo stioro pisano componevasi di 66 *pertiche quadre;* e ciascuna di queste conteneva 25 braccia quadre.

L'unità di misura pei solidi è generalmente il *braccio cubo* che si compone di 800 *soldi cubi;* il soldo cubo poi si compone di 1728 *denari cubi.*

Pel legname da ardere v'ha la *catasta*, la quale si compone di 24 *braccia cube*, oppure, secondo l'uso del commercio, di sole 18.

Pel legname da costruzione v'ha il *traino*, che si divide in 12 *bracciola*, ed il bracciolo in 12 *once.*

L'unità di capacità pei liquidi è il *barile;* il quale, se si tratta di vino, contiene libbre 133 e once 4 d'umido, e componesi di 20 fiaschi; se d'olio, contiene libbre 88 d'umido, e componesi di fiaschi 16.

L'unità di capacità per gli aridi si chiama *staio*, e si divide in 4 *quarti;* il quarto in 8 *mezzette;* la mezzetta in 2 *quartucci:* 3 staia formano un *sacco*, e 8 sacca formano il *moggio.*

L'unità monetaria è la *lira*, o più modernamente il *fiorino.* La lira si divide in 20 *soldi* di 12 *denari* ciascuno; il fiorino si divide in 100 *quattrini* o centesimi. V'hanno pure unità monetarie ideali, come lo *scudo fiorentino* equivalente a lire 7, e la *pezza* di Livorno che si usa in commercio, equivalente a lire $5\frac{3}{4}$, e che si divide in 20 *soldi;* il soldo poi si divide in 12 *denari*, come nelle divisioni e suddivisioni della lira.

L'unità di peso è per noi la *libbra;* essa si divide in 12 parti chiamate *once;* l'oncia si divide in 24 *denari;* il denaro in 24 *grani.*

TAVOLE DI MISURE.

Misure lineari per gli usi comuni.

		Metri.
Amburgo,	*piede del Reno*	0,313854
Amsterdam,	*piede.*	0,283
	auna.	0,6903
Anversa,	*piede.*	0,286
	auna per la seta.	0,694
	auna per la lana.	0,684
Austria,	*klafter* o tesa composta di 6 piedi, (il piede è 12 pollici, il pollice è 12 linee).	1,896614
Bade (granducato),	*auna* di 2 piedi.	0,600000
Bologna,	*piede.*	0,3801
Carrara,	*palmo* pei marmi.	0,24927
Copenaghen,	*auna.*	0,6276
Costantinopoli,	*pic* piccolo per i panni.	0,648
Dresda,	*auna.*	0,5665
Ferrara,	*piede.*	0,4039
Firenze,	*braccio* composto di 20 soldi, il soldo è 12 denari.	0,58366
Francoforte,	*auna.*	0,5473
Genova,	*palmo.*	0,2491
Ginevra,	*piede.*	0,4879
	auna.	1,144
Grecia,	*piede.*	0,306
	piede olimpico antico $\frac{1}{6000}$ del miglio di 60 a grado.	0,30859
	piede pizio o *delfico* antico, $\frac{4}{5}$ dell' olimpico.	0,24687
Inghilterra,	*piede* composto di 12 once o pollici (il pollice di 10 linee.	0,3047945
	yard composto di 3 piedi.	0,9143835
	fathom o *tesa* di 6 piedi.	1,8287670
Lisbona,	*vara* o *auna.*	1,093
Losanna,	*tesa* composta di 10 piedi.	3,0000000
Madrid,	*vara* o *auna* di Castiglia, composta di 3 piedi.	0,848
Mantova,	*piede.*	0,4669

		Metri.
MILANO,	*braccio* comune.	0,594936
	piede agrimensorio.	0,435185
MODENA, *piede*.		0,5230
MONACO, *auna*.		0,833
NAPOLI, *palmo* $\frac{1}{7000}$ del miglio di 60 a grado (dopo il 1840 si divide in parti decimali; 10 palmi formano una canna).		0,2645503
PADOVA, *piede*.		0,3574
PARIGI,	*piede*.	0,3248394
	auna (antica misura).	1,188446
	metro.	1,0000000
PRESBURGO, *auna*.		0,5581
PRUSSIA,	*piede* del Reno (si compone di 12 pollici).	0,3138536
	auna nuova (25,5 pollici).	0,666938
	tesa (6 piedi).	1,8831216
	ruthe (pertica di 12 piedi).	3,7622432
	tesa dei minatori (6 piedi, 8 pollici).	2,0925573
REGGIO di Modena, *piede*.		0,5309
RENO *piede* (del) comune a gran parte della Germania.		0,313854
ROMA,	*piede*.	0,297896
	palmo $\frac{3}{4}$ del piede.	0,223422
	piede antico $\frac{1}{5000}$ del miglio di 75 a grado.	0,29625
	cubito di piedi 1 $\frac{1}{2}$ corrispondente ad $\frac{1}{10000}$ della lega di 25 a grado.	0,44437
RUSSIA;	*piede* eguale al piede inglese composto di 12 pollici.	0,3047945
	archina formata di 28 pollici inglesi.	0,7111872
	sagena composta di 84 pollici o di 7 piedi.	2,1335615
SARDEGNA,	*palmo*.	0,248
	raso o *auna*.	0,549
SICILIA *palmo*.		0,258098
SVEZIA,	*piede*.	0,297
	auna.	0,594
TORINO,	*piede* detto *liprando*, composto di 12 once, ed eguale ad $\frac{1}{4800}$ del miglio di 45 a grado.	0,5137
	raso composto di 14 once del piede.	0,5994

	Metri.
VARSAVIA, *auna*.	0,5846
VENEZIA, *piede*.	0,3474
VERONA, *piede*.	0,3429

Misure itinerarie (a).	Metri.	Numero di misure contenute in un grado.
ALEMAGNA, *miglio* di 15 a grado.	7408	15
ALEMAGNA, *lega* di 12 a grado.	9260	12
AMBURGO, *miglio* di 24000 piedi del Reno, poco diverso dal miglio di 15 a grado.	7532	14 $\frac{3}{4}$
AUSTRIA, *miglio* di 24000 piedi austriaci.	7586	14 $\frac{2}{3}$
BADE (Granducato), *lega* di 12 $\frac{1}{2}$ a grado.	8890	12 $\frac{1}{2}$
CHINA, *miglio* detto *li*.	577	192 $\frac{3}{5}$
COPENAGHEN, come Amburgo.		
FIRENZE, *miglio* di braccia 2833,313.	1653,607	67 $\frac{1}{5}$
FRANCIA, *miriametro* composto di 10 chilometri.	10000	11 $\frac{1}{9}$
FRANCIA, *lega* di 25 a grado.	4445	25
FRANCIA, *lega* marina di 20 a grado, usata anche in Olanda in Portogallo ed in Polonia.	5556	20
GRECIA antica, *stadio* olimpico di 600 piedi olimpici equivalente ad $\frac{1}{10}$ del miglio di 60 a grado.	185	600
GRECIA antica, *stadio pizio* o *delfico* di 600 piedi delfici equivalente ad $\frac{1}{10}$ del miglio di 75 a grado.	148	750
ITALIA, *miglio* di 60 a grado usato come miglio marino da molte nazioni, e specialmente dalla Francia dall' Inghilterra e dall' Austria.	1851,9859	60
INGHILTERRA, *miglio* di 1760 *yards*.	1609	69
POLONIA, *miglio* di 20 a grado.	5556	20
PORTOGALLO, *lega* terrestre di 18 *yards*.	6173	18

(a) In questa tavola si è supposto il quadrante terrestre di 10000724 metri, secondo Delambre.

	Metri.	Numero di misure contenute in un grado.
PRUSSIA, *miglio* di 24000 piedi del Reno.	7532	14 $\frac{3}{4}$
PRUSSIA, *miglio* di 15 a grado prima del 1816.	7408	15
ROMA, *miglio* di 1000 passi ciasc. di 5 piedi.	1489	74 $\frac{5}{8}$
ROMA antica, *miglio* di 75 a grado, composto di 1000 passi ciascuno di 5 piedi antichi.	1481	75
ROMA antica, *stadio* $\frac{1}{8}$ del miglio eguale ad $\frac{1}{10}$ del miglio di 60 a grado.	185	600
RUSSIA, *wersta* di 1500 archine o di 3500 piedi inglesi.	1067	104 $\frac{1}{7}$
RUSSIA, *miglio* finlandico di 10 werste.	10668	10 $\frac{5}{12}$
SPAGNA, *lega* itineraria di 8000 vare.	6784	16 $\frac{3}{8}$
SPAGNA, *lega* marina di 17 $\frac{1}{2}$ a grado.	6350	17 $\frac{1}{2}$
SVEZIA, *miglio* di 10 $\frac{2}{3}$ a grado.	10417	10 $\frac{2}{3}$
TORINO, *miglio* piemontese di 4800 piedi.	2466	45
TURCHIA, miglio detto *berri*.	1670	66 $\frac{7}{13}$

Misure superficiali.	Are.	Numero di misure in un miglio quadrato.
AUSTRIA, *yuchart* di 1600 klafter quadrati.	57,5543	595 $\frac{11}{13}$
FIRENZE, *quadrato* di 10 tavole ognuna di 10 pertiche (la pertica è 10 deche).	34,0619	
FIRENZE, *stioro* di 12 panora ognuna di 12 pugnora (il pugnoro è 12 b. q. $\frac{12}{17}$).	6,2341	
GRECIA antica, *plettro* di 10000 piedi olimpici quadrati.	9,523	3601 $\frac{1}{3}$
INGHILTERRA, *acre* di 4840 yards quadrati.	40,4671	847 $\frac{4}{9}$
MADRID, *fanegada* pei campi di 500 estadales quadrati.	48,34	709 $\frac{5}{7}$
MADRID, *aranzada* pei vigneti di 400 estadales quadrati. (*estadale* è una lunghezza di 11 piedi, o di vare 3 $\frac{2}{3}$).	38,67	886 $\frac{4}{5}$

	Are.	Numero di misure in un miglio quadrato.
Milano, *pertica* di 24 tavole ognuna di 144 piedi quadrati.	6,5452	5239 $\frac{1}{2}$
Napoli, *moggio* nuovo di 10000 palmi quadrati.	6,99868	4900
Napoli, *moggio* antico di 48400 palmi quadrati.	33,8736	1012 $\frac{2}{5}$
Parigi, *arpent*, misura antica di 100 pertiche quadrate, essendo la pertica lineare di 18 piedi.	34,18869	1003 $\frac{4}{13}$
Prussia, *morgen* di 180 pertiche quadrate (la pertica lineare di 12 piedi del Reno).	25,5323	1343 $\frac{1}{7}$
Roma, *pezza* di 16 catene quadrate, la catena lineare essendo composta di palmi 57 $\frac{1}{2}$.	26,4062	1298 $\frac{9}{13}$
Roma antica, *jugero* di 28800 piedi antichi quadrati.	25,2761	1356 $\frac{3}{4}$
Russia, *deciatine* di 2400 sagene quadrate.	109,25000	313 $\frac{9}{16}$
Sicilia, *salma* di 4096 canne quadrate. .	174,6259	196 $\frac{5}{13}$

Misure di capacità.

		Litri.
Firenze,	*barile* da vino.	45,584041
	barile da olio.	33,428908
	staio per gli aridi.	24,362862
Grecia antica, *anfora attica* equivalente a $\frac{2}{3}$ del cubo di $\frac{24}{25}$ di un piede olimpico.		39,000
Inghilterra,	*gallone* imperiale.	4,543458
	bushel di 8 galloni per gli aridi.	36,347664
	quarter di 8 bushels.	290,781312
Napoli,	*tomolo* per gli aridi, eguale a 3 palmi cubi napolitani.	55,545113
	barile pel vino, eguale a 3 palmi cilindrici.	43,625030
Parigi,	*setier*, misura antica composta di 12 boisseaux (6 canf. ant. rom.). . .	156,000
	la *tonnellata* di mare considerata a volume eguaglia 42 piedi francesi cubici, ossia metri cubi 144. . . .	

	Litri.
Roma antica, *anfora* eguale al cubo del *piede* romano antico.	26,000
Sicilia, *tomolo* per gli aridi eguale ad un *palmo* cubo siciliano.	17,193053
Sicilia, *barile* pel vino eguale a 2 *palmi* cubi siciliani.	34,386106

PESI.

	Chilogrammi.
Amburgo, *libbra*.	0,4843
Amsterdam, *libbra* di 16 once.	0,494
Anversa, *libbra*.	0,47016
Austria, *libbra*.	0,5600
Bade (Granducato), *libbra*.	0,500000
Copenaghen, *libbra*.	0,4994
Costantinopoli, *oka* o *rotolo* grosso.	1,27
Dresda, *libbra*.	0,467
Firenze, *libbra*.	0,339542
Genova, *libbra*.	0,317
Grecia antica, *mina attica* o *libbra* eguale ad $\frac{1}{120}$ del peso di un volume di acqua piovana corrispondente all'*anfora attica*.	0,3258
Inghilterra, *libbra troy* composta di 12 once ognuna di 480 grani.	0,373096
Inghilterra, *libbra avoirdupois* eguale a 7000 grani troy.	0,453415
Inghilterra, la *tonnellata* di mare è composta di 20 quintali ognuno di 112 libbre *avoirdupois* ed equivale a chilogrammi 1015 $\frac{2}{3}$.	
Lisbona, *libbra*.	0,4588
Lisbona, *arrobba* peso di 32 libbre.	
Losanna, *libbra* di 16 once.	0,500000
Madrid, *libbra*.	0,460
Milano, *libbra* grossa di 28 once.	0,762517
Milano, *libbra* piccola di 12 once.	0,326793
Napoli, *rotolo* eguale ad $\frac{1}{11}$ del peso di un volume di acqua distillata corrispondente al cubo di $\frac{4}{5}$ di palmo alla temperatura di 16° $\frac{1}{4}$ centigra-	

	Chilogrammi.
di, e sotto la pressione barometrica di 28 pollici.	0,890997
PARIGI, *libbra* antica detta di *marco*, composta di 16 once, ogni oncia di 8 grossi ed ogni grosso di 72 grani.	0,489506
PRUSSIA, *libbra* eguale ad $\frac{1}{66}$ del peso di un piede cubo del Reno di acqua distillata alla temperatura di 15 gradi di Reaumur.	0,467711
ROMA, *libbra* attuale.	0,389
ROMA, *libbra* antica eguale ad $\frac{1}{80}$ del peso di un'*anfora* o sia di un piede cubo antico di acqua piovana.	0,3258
RUSSIA, *libbra* della Zecca.	0,409367
SICILIA, *rotolo*.	0,79342
SVEZIA, *libbra* detta *victualia*.	0,425
TORINO, *libbra*.	0,368845
TORINO, *rubbo* peso di 25 libbre.	
VARSAVIA, *libbra*	0,405

TAVOLA DEI VALORI DI DIVERSE MONETE

al pari. (a)

	Franchi.
AMSTERDAM, *fiorino* di nuovo conto.	2,14
AUSTRIA, *lira* austriaca.	0,865
AUSTRIA, *fiorino* di 3 lire.	2,595
AUSTRIA, *risdallero* di due fiorini.	5,19
BADE (Granducato), *fiorino*.	2,12
BAVIERA, *fiorino d'impero*, moneta di conto.	2,16
BELGIO, *fiorino* corrente, antica moneta di conto.	1,82
BELGIO, *franco*, nuova moneta.	1,00
COPENAGHEN, *risdallero*.	5,66
COSTANTINOPOLI, *pezza* di 5 *piastre* del 1811.	4,14
COSTANTINOPOLI, una *borsa* vale 500 piastre.	
FIRENZE, *lira*.	0,84
FRANCOFORTE, *risdallero* o *tallero* di 90 kreutzers.	3,90
FRANCOFORTE, *fiorino di* 60 kreutzers.	2,60

(a) Il rappòrto delle monete *al pari* è il rapporto delle quantità di metallo fino d'oro e d'argento che contengono, esclusa la *lega*.

		Franchi.
GENOVA, *lira*		0,835
GRECIA antica,	*dramma*, unità monetaria	0,93
	mina di 100 dramme	92,68
	talento d'argento di 60 mine	5561
	talento d'oro di 600 mine	55609
INGHILTERRA, *lira sterlina* di 20 scellini		25,208
MILANO,	*lira* austriaca	0,865
	lira antica	0,76
NAPOLI, *ducato* di 100 grana		4,25
PARIGI, *lira* antica, detta *tornese*		0,99
PIEMONTE,	*lira* nuova eguale al franco	1,00
	lira antica	1,18
POLONIA, *risdallero*		5,19
PORTOGALLO, *cruzada* nuova di 480 *reali*		2,94
PRUSSIA, *scudo, risdallero* o *tallero*		3,71
ROMA, *scudo*		5,36
ROMA antica,	*sesterzio* o *nummus*, unità monetaria	0,20
	denaro di 4 sesterzi	0,81
	aureo di 25 denari, o 100 sesterzi	20,38
	talento grande di 32000 sesterzi	6522
	talento piccolo di 24000 sesterzi	4491
RUSSIA, *rublo*		4,00
SARDEGNA, come il *Piemonte*.		
SPAGNA,	*reale di plata*	0,543
	reale di veglione, metà del precedente	0,271
VENEZIA, *zecchino*		11,95

Calcolo delle misure nelle quali l'unità principale non è divisa in parti decimali.

416*. Abbiamo veduto che nel sistema di misure toscano, come in quello di molti altri stati, l'unità principale non è divisa in parti decimali, ma in altre parti il cui numero vien determinato dall'uso.

Così la *tesa*, antica misura di lunghezza francese, si divide in 6 *piedi*, il piede in 12 *pollici*, il pollice in 12 *linee*, e la linea in 12 *punti*. Quindi una lunghezza espressa per esempio da 15 *tese* 7 *pollici* 11 *linee*, con-

tiene diverse classi di unità di grado in grado più piccole derivate le une dalle altre secondo una suddivisione convenuta; l'unità principale si chiama *la prima specie*, e l'ultima o la più piccola dicesi *l'ultima specie*. Nell'esempio precedente la *tesa* è la prima specie, e la *linea* è l'ultima specie. Il calcolo di queste misure richiede speciali avvertenze, che ci proponiamo di esporre con qualche larghezza in quel che segue.

417*. Il calcolo delle misure di cui è parola si può ridurre a quello dei numeri ordinari o a quello dei numeri decimali convertendo i numeri espressi nei sistemi rispettivi in frazioni ordinarie o decimali dell'unità principale. Comecchè questo metodo non sia preferibile in generale, pur nondimeno è utile far conoscere come possa effettuarsi questa riduzione.

1°. *Ridurre in frazione ordinaria* $7^{tese}\ 4^{piedi}\ 9^{pollici}\ 6^{linee}$

tese	*piedi*	*pollici*	*linee*
7	4	9	6
$7\frac{115}{144}$	$4\frac{19}{24}$	$9\frac{1}{2}$	$\frac{6}{12}$ *di pollice*
$\frac{1123}{144}$ *di tesa*	$\frac{115}{24}$ *di piede*	$\frac{19}{2}$ *di pollice*	$\frac{1}{2}$
	$\frac{115}{114}$ *di tesa*	$\frac{19}{24}$ *di piede*	

Poichè 1 linea è $\frac{1}{12}$ di pollice, 6 linee sono $\frac{6}{12}$ o $\frac{1}{2}$ di pollice; quindi 9 pollici 6 linee equivalgono a pollici $9\frac{1}{2}=\frac{19}{2}$ di pollice. Ma 1 pollice è $\frac{1}{12}$ di piede, dunque $\frac{19}{2}$ di pollice sono $\frac{19}{2\times12}$ o $\frac{19}{24}$ di piede; per conseguenza 4 piedi 9 pollici 6 linee corrispondono a piedi

$4\frac{19}{24}$ o a $\frac{115}{24}$ di piede; ma il piede è $\frac{1}{6}$ di tesa, dunque $\frac{115}{24}$ di piede sono $\frac{115}{24\times6}$ o $\frac{115}{144}$ di tesa. Quindi 7 tese 4 piedi 9 pollici 6 linee, equivalgono a tese $7\frac{115}{144}$ o a $\frac{1123}{144}$ di tesa.

Osservazione. La riduzione richiesta può effettuarsi ancora in un altro modo. 7 tese sono eguali a 42 piedi; quindi 7 tese 4 piedi equivalgono a 46 piedi, cioè a 46×12, o a 552 pollici; dunque 7 tese 4 piedi 9 pollici pareggiano 561 pollici, cioè 561×12 o 6732 linee; e per conseguenza 7 tese 4 piedi 9 pollici 6 linee sono eguali a 6738 linee. Ma 1 linea è $\frac{1}{12}$ di pollice, $\frac{1}{144}$ di piede, $\frac{1}{864}$ di tesa; dunque il numero proposto equivale a $\frac{6738}{864}$ di tesa.

Il primo metodo è però in generale preferibile al secondo perchè dà un risultato più semplice.

2°. *Ridurre in frazione decimale* $9^{lire}\ 12^{soldi}\ 8^{denari}$.

80	12	
80	0,666...	
	12,666...	20
	66	0,6333...
	66	9,6333...

Poichè 1 denaro è $\frac{1}{12}$ di soldo, 8 denari sono $\frac{8}{12}$ o 0,666.... di soldo; quindi 12 soldi 8 denari, corrispondono a soldi 12,666.... Per ridurre questo numero in frazione decimale di lira, bisognerà dividerlo per 20,

e si avrà 0,6333....; quindi 9 lire 12 soldi 8 denari equivalgono a lire 9,6333....

418*. Le questioni reciproche alle precedenti si risolvono con eguale facilità.

1°. *Ridurre la frazione ordinaria* $\frac{10211}{432}$ *di libbra* (*toscana*) *in libbre e parti di libbra.*

Dividendo il numeratore pel denominatore si ha 23 per quoziente e 275 per resto; dunque la frazione proposta è uguale a 23 libbre e $\frac{275}{432}$ di libbra. Ma una libbra è 12 once, dunque $\frac{275}{432}$ di libbra sono eguali a $\frac{275\times12}{432}$ di oncia $=\frac{175}{36}$ di oncia, cioè a 7 once e $\frac{23}{36}$ di oncia. Un'oncia è 24 denari, quindi $\frac{23}{36}$ di oncia sono eguali a $\frac{23\times24}{36}$ di denaro $=\frac{46}{3}$ di denaro, ovvero a 15 denari e $\frac{1}{3}$ di denaro. Un denaro è 24 grani, quindi $\frac{1}{3}$ di denaro è $\frac{24}{3}$ di grano ovvero 8 grani. Dunque la frazione ordinaria $\frac{10211}{432}$ di libbra equivale a 23 libbre, 7 once, 15 denari, 8 grani.

2°. *Ridurre la frazione decimale* $8^{tese},7892$ *in tese e parti di tesa.*

Si moltiplicherà 0,7892 per 6 e si otterrà 4,7352, che esprimerà 4 piedi con una frazione decimale di piede; si moltiplicherà 0,7352 per 12, e si avrà 8,8224, cioè 8 pollici ed una frazione decimale di pollice; finalmente si moltiplicherà 0,8224 per 12 e si avrà 9,8688 cioè 9 linee e una frazione di linea. Quindi la frazione

decimale $8^{tes},7892$ equivale a 8 tese, 4 piedi, 8 pollici e 10 linee.

I calcoli dei due ultimi esempi si dispongono nel seguente modo

Libbre.		*Tese.*
10211	432	8, 7892
275	23 lib., 7 onc.,	6
12	15 den., 8 gr.	4^p, 7352
3300		12
276		8^p, 8224
24		12
6624		9^l, 8688
144		
24		
3456		

Passiamo adesso a vedere quali avvertenze bisogna avere nell'addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione dei numeri concreti di cui si tratta.

Addizione.

419*. *Si scrivono i numeri proposti uno sotto l'altro, situando nella medesima colonna le unità della stessa classe; si comincia l'addizione dalle unità dell'ultima specie, e quando la loro somma sorpassa il numero di cui si compone l'unità della specie precedente, si riportano una o più di queste unità alla colonna cui appartengono; si fa l'addizione dei numeri contenuti nella nuova colonna, e dalla somma ottenuta si estraggono, se ve ne sono, le unità appartenenti alla terza colonna, e così di seguito.*

ESEMPJ.

tese	piedi	pollici	linee
8	4	9	7
2	3	5	2
5	5	6	9
17	1	9	6

tese quad.	piedi quad.	pollici quad.
54	22	100
31	12	100
4	35	48
90	34	104

La somma delle linee produce 18 linee, cioè 1 pollice più 6 linee; scriveremo 6 sotto la colonna delle linee, e riterremo un pollice per aggiungerlo alla colonna dei pollici. La somma dei pollici dà 20 pollici e 1 della colonna precedente, 21 pollici, cioè 1 piede e 9 pollici. Scriveremo 9 sotto la colonna dei pollici e riterremo 1 piede per aggiungerlo alla colonna dei piedi. La somma dei piedi dà 12 piedi e 1 della colonna precedente, 13 piedi, cioè 2 tese più 1 piede. Scriveremo 1 sotto la colonna dei piedi, e le 2 tese le aggiungeremo alla somma delle tese, cioè a 15, e avrèmo in tutto 17 tese. Dunque la somma totale è: 17 tese, 1 piede, 9 pollici, 6 linee.

La somma di tese quadrate, piedi quadrati e pollici quadrati, si eseguisce in un modo affatto analogo al precedente; basta solo avvertire che la tesa quadrata contiene $6\times6=36$ piedi quadrati; il piede quadrato contiene $12\times12=144$ pollici quadrati, ec. Se la somma fosse fra tese cube, piedi cubi, pollici cubi, il procedimento sarebbe sempre lo stesso, avendo presente che la tesa cuba contiene $6\times6\times6=216$ piedi cubici; il piede cubo contiene $12\times12\times12=1728$ pollici cubici, ec.

Sottrazione.

420*. *Si dispongono i numeri proposti come nell'addizione, e si comincia l'operazione dall'ultima specie; quando in qualche classe il numero da sottrarsi è mag-*

giore di quello da cui deve togliersi, si aggiunge a quest' ultimo un' unità presa dalla classe precedente, dopo averla ridotta in unità della specie inferiore sulla quale si eseguisce la sottrazione.

ESEMPJ.

lire	*soldi*	*denari*
12	14	8
7	19	11
4	14	9

braccia cube	*soldi cubi*	*denari cubi*
95	60	96
21	500	624
73	7559	1200

Nella prima sottrazione si ragiona a questo modo: da 8 denari non possiamo togliere 11 denari, quindi agli 8 denari aggiungeremo 1 soldo, cioè 12 denari, togliendo questo soldo dai 14 contenuti nella colonna dei soldi, e diremo 12 denari e 8 denari sono 20 denari, dai quali tolti 11 denari avremo 9 per resto, che scriveremo sotto la colonna dei denari. Dai 13 soldi rimanenti non si possono sottrarre 19 soldi; perciò prenderemo 1 lira, cioè 20 soldi, dalle 12 della colonna delle lire, e diremo 20 soldi più 13 sono 33 soldi, dai quali sottratti 19 soldi, avremo 14 per resto, che scriveremo sotto la colonna dei soldi. Finalmente, sottraendo 7 lire da 11 lire, avremo 4 lire, che scriveremo sotto la colonna delle lire.

La sottrazione di braccia cube, soldi cubi e denari cubi si eseguisce coi medesimi principii, avendo presente che un braccio cubo contiene $20\times20\times20=8000$ soldi cubici; un soldo cubo contiene $12\times12\times12=1728$ denari cubici.

Moltiplicazione.

421*. Abbiamo veduto (28, 167) che moltiplicare una quantità per un numero significa ripetere questa quan-

tità tante volte quante unità sono nel moltiplicatore, ovvero prendere di questa quantità tante parti quante sono indicate dal moltiplicatore. Da ciò risulta che *nella moltiplicazione dei numeri concreti il prodotto sarà sempre dello stesso genere del moltiplicando; ed il moltiplicatore figurerà da numero astratto.* Così, per esempio, sapendo che un metro di panno costa 18 franchi e 56 centesimi, il costo di 7 metri dello stesso panno sarà dato dal prodotto 18,56 per 7, ed il prodotto 129,92 esprimerà franchi come il moltiplicando 18,56.

422*. La moltiplicazione può effettuarsi in più modi: 1°. *riducendo in frazioni ordinarie o decimali della prima specie il moltiplicando e il moltiplicatore, eseguendo la moltiplicazione come si è praticato pei numeri astratti, e convertendo il prodotto ottenuto in unità del moltiplicando e parti di unità.* Supponiamo, per esempio, che si voglia calcolare il costo di 6 braccia, 9 soldi, 4 denari di un panno che si è comprato a 16 lire 18 soldi 8 denari il braccio. La frazione di braccio, 9 soldi 4 denari, equivale a $\frac{7}{15}$ di braccio, e la frazione di lira 18 soldi 8 denari equivale a $\frac{14}{15}$; quindi si moltiplicherà $6\frac{7}{15}$ per $16\frac{14}{15}$ e si otterrà il prodotto $109\frac{113}{225}$ che deve esprimer lire; e riducendo in parti di lira la frazione ordinaria $\frac{113}{225}$, il costo domandato sarà 109 lire, 10 soldi, $\frac{8}{15}$ di denaro.

Saremmo giunti allo stesso risultamento se i due fattori si fossero ridotti in frazioni decimali.

423*. Supponiamo adesso di voler moltiplicare 5 *braccia* 8 *soldi* 4 *denari* per 7 *braccia* 6 *soldi* 8 *denari;* il pro-

dotto esprimerà evidentemente *braccia quadrate, soldi quadrati, denari quadrati.* Questo metodo si applica con vantaggio al prodotto di misure lineari per misure lineari della stessa specie. Infatti il primo numero equivale a $\frac{65}{12}$ di braccio, e il secondo a $\frac{22}{3}$ di braccio. Il prodotto di questi due numeri è $\frac{65\times22}{12\times3}=\frac{65\times11}{6\times3}=\frac{715}{18}$ $=39$ b. q. $+\frac{13}{18}$ di b.q.; per ridurre la frazione $\frac{13}{18}$ di b. q. in soldi quadrati, basta moltiplicarla per 400, ovvero moltiplicare il numeratore per 200 e dividere il denominatore per 2; si ottiene $\frac{2600}{9}=288\frac{8}{9}$, cioè 288 s.q. $+\frac{8}{9}$ di s.q.; quest' ultima frazione si riduce in denari quadrati, moltiplicandola per 12×12, o, ciò che è lo stesso, moltiplicando il numeratore per 16 e dividendo il denominatore per 9; si ottiene 128 denari quadrati. Il prodotto richiesto è quindi 39 b.q. 288 s.q. 128 d.q.

Se i numeri da moltiplicare fra loro fossero 5 *braccia* 8 *soldi* 4 *denari;* 7 *braccia* 6 *soldi* 8 *denari;* 3 *braccia* 4 *soldi* 8 *denari;* si farebbe il prodotto dei due primi fattori, e il risultato 39 b.q. 288 s.q. 128 d.q. si moltiplicherebbe per $3^b\ 4^s\ 8^d$: il risultato esprimerebbe evidentemente misure cubiche. Per eseguire questo secondo prodotto si procederà in un modo affatto simile al precedente; così 128 *denari quadrati* sono $\frac{128}{144}=\frac{8}{9}$ di un soldo quadrato; quindi $288^{sq}\,128^{dq}=288^{sq}\frac{8}{9}=\frac{2600}{9}$ di s.q. $=\frac{2600}{9\times400}$ di b.q. $=\frac{26}{36}$ di b.q. $=\frac{13}{18}$ di b q.; e per

conseguenza $39^{bq}\ 288^{sq}\ 128^{dq}$ sono $39^{bq}\frac{13}{18}=\frac{715}{18}$ di b.q.
Il numero $3^{b}\ 4^{s}\ 8^{d}$ corrisponde a $\frac{97}{30}$ di braccio. Il prodotto dei numeri proposti è quindi $\frac{715\times97}{18\times30}=\frac{143\times97}{18\times6}$ $=\frac{13871}{108}$, che equivale a $128^{bc}\frac{47}{108}$. Per ridurre la frazione $\frac{47}{108}$ di braccio cubo in soldi cubici, ricordiamo che un braccio cubo contiene 8000 soldi cubici; quindi $\frac{47}{108}$ di b.c., equivalgono a $\frac{47\times8000}{108}$ o a $\frac{47\times2000}{27}=\frac{94000}{27}$ di s.c., e finalmente a $3481^{sc}\frac{13}{27}$. Un soldo cubo contiene 1728 denari cubici, e per conseguenza $\frac{13}{27}$ di s.c. equivalgono a $\frac{13\times1728}{27}$ di d.c. $=13\times64$ d.c. $=832$ denari cubi. Dunque il prodotto richiesto è $128^{bc}\ 341^{sc}\ 832^{dc}$.

424'. 2°. Il secondo metodo, che chiamasi di *prendere in parti*, è in generale preferibile ai precedenti ed è particolarmente molto adoperato nell' astronomia pratica. Supponiamo, come primo esempio, di volere moltiplicare il numero complesso 20 lire, 14 soldi, 8 denari per 8 braccia. Il moltiplicando essendo composto di più parti, bisognerà moltiplicare ciascuna di esse separatamente per il moltiplicatore e sommare i prodotti ottenuti. Per eseguire queste moltiplicazioni parziali si considera ogni parte decomposta in parti più piccole, ma tali che ciascuna sia contenuta un esatto numero di volte nella parte precedente, cioè che sia, come suol

dirsi, una parte *aliquota* della medesima. L'esempio seguente dichiarerà meglio il metodo.

	20^l	14^s	8^d
	8^b		
	160^l		
per 10 *soldi*. . .	4		
per 2 *soldi*. . .	0	16^s	
per 2 *soldi*. . .	0	16	
per 8 *denari*. .		5	4^d
Totale. . .	165^l	17^s	4^d

Per moltiplicare 8 *braccia* per 14 *soldi*, si è considerato il moltiplicando 14 decomposto in 10 più 2 più 2, e si è detto: poichè il prodotto di 8 *braccia* per 1 *lira* dà 8 *lire*, il prodotto di 8 *braccia* per 10 *soldi*, che sono metà di una lira, dovrà dare la metà di 8 *lire*, cioè 4 *lire*; ed il prodotto di 8 *braccia* per 2 *soldi*, che sono la quinta parte di dieci soldi, dovrà dare la quinta parte di 4 soldi, cioè 0^l 16^s; il qual resultato si si è scritto due volte. Per formare il prodotto per 8 *denari* si è detto: se il prodotto di 8 *braccia* per 2 *soldi* è 16 *soldi*, il prodotto di 8 *braccia* per 8 *denari*, che sono la terza parte di 2 *soldi*, deve dare la terza parte di 32 *soldi*, cioè 5^s 4^d. Avverto che il prodotto per 4 soldi poteva effettuarsi ad un tratto, osservando che 4 soldi sono la quinta parte di una lira, e che quindi il prodotto di 8 braccia per 4 soldi dovrà dare la quinta parte di 8 lire, cioè 1^l 12.

Come secondo esempio, proponiamoci di moltiplicare lo stesso numero complesso 20^l 14^s 8^d per l'altro numero complesso 8^b 6^s 3^d. L'operazione procederà nel modo seguente:

	20^{l}	14^{s}	8^{d}
	8^{b}	6^{s}	3^{d}
	160^{l}		
per 10 *soldi*. . .	4		
per 4 *soldi*. . .	1	12^{s}	
per 8 *denari*. .		5	4^{d}
per 4 *soldi*. . .	4	2	$11\frac{1}{5}$
per 2 *soldi*. . .	2	1	$5\frac{3}{5}$
per 3 *denari*. .		5	$2\frac{1}{5}$
Prodotto totale	172^{l}	6^{s}	11^{d}

La moltiplicazione per 8 *braccia* si fa come sopra; poi il moltiplicatore 6 *soldi* si decompone in 4 *soldi* e 2 *soldi*, e si dice: poichè il prodotto di 1 *braccio* per 20^{l} 14^{s} 8^{d} dà 20^{l} 14^{s} 8^{d}, il prodotto di 4 *soldi*, che sono il quinto di un *braccio*, per lo stesso numero, darà la quinta parte di 20^{l} 24^{s} 8^{d}, cioè 4^{l} 2^{s} $11^{s}\frac{1}{5}$; ed il prodotto per 2 *soldi*, metà di 4 soldi, per 20^{l} 14^{s} 8^{d}, darà la metà di 4^{l} 2^{s} $11^{d}\frac{1}{5}$, cioè 2^{l} 1^{s} $5^{d}\frac{3}{5}$. Osservando adesso che 2 *soldi* equivalgono a 24 *denari*, si vede che 3^{d} sono l'ottavo di 2 *soldi*, e quindi il prodotto di 3 *denari* per 20^{l} 14^{s} 8^{d} è l'ottavo di 2^{l} 1^{s} $5^{d}\frac{3}{5}$, cioè 5^{s} $2^{d}\frac{1}{5}$.

Divisione.

425*. Bisogna considerare due casi:

1°. *Quando il dividendo e il divisore sono dello stesso genere;*

2°. *Quando il dividendo e il divisore sono di diverso genere.*

Il primo caso ha luogo, per esempio, nel seguente quesito: Sapendosi che una libbra di una certa mercanzia costa 34^{lire} 12^{soldi} 3^{denari}, si domanda quante libbre di una tal mercanzia potranno comprarsi con 1528^{lire} 14^{soldi} 6^{denari}.

Infatti è chiaro che per risolvere questa questione bisogna vedere quante volte $34^l\ 12^s\ 6^d$ sono contenute in $1528^l\ 14^s\ 6^d$, e si vede che il quoziente dev'essere di genere diverso dal dividendo e dal divisore. Per eseguire questa divisione bisognerà ridurre i due numeri dati in frazioni ordinarie della prima specie, ed esprimere il quoziente in forma di numero astratto o di numero concreto, come esige il quesito che ha dato motivo al calcolo.

$1528^l\quad 14^s\quad 6^d \qquad\qquad 34^l\quad 12^s\quad 3^d$

$1528\frac{29}{40}\quad 14\frac{1}{2} \qquad\qquad 34\frac{49}{80}\quad 12\frac{1}{4}$

$$\begin{array}{r} 61120 \\ 29 \\ \hline 61149 \\ \hline 40 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 29 \\ \hline 2 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 2720 \\ 49 \\ \hline 2769 \\ \hline 80 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 49 \\ \hline 4 \end{array}$$

$$\frac{61149}{40} : \frac{2769}{80} = \frac{122298}{80} : \frac{2769}{80} = \frac{122298}{2769}$$

$$\begin{array}{r} 122298^{libbre} \\ 11538 \\ 462 \\ 12 \\ \hline 924 \\ 462 \\ \hline 5544^{oncie} \\ 6 \\ 24 \\ \hline 144^{denari} \\ 24 \\ \hline 576 \\ 288 \\ \hline 3456^{grani} \\ 687 \end{array} \quad \begin{array}{|l} 2769 \\ \hline 44^l\ 2^o\ 0^d\ 1^g\frac{229}{923} \end{array}$$

426*. *La divisione, nel caso che si considera, si eseguisce spesso più facilmente riducendo i numeri dati in unità dell'ultima specie, e dividendoli uno per l'altro con esprimere il quoziente in forma di numero astratto o concreto, a norma della quistione che ha dato motivo al calcolo.* Ecco un esempio di questo processo.

Si domanda quante lire ci vogliono per comprare 98 braccia 18 soldi 8 denari di panno, sapendo che con una lira si comprano 2 braccia 8 soldi 4 denari di questo panno.

L' operazione si dispone nel seguente modo:

	98^b 18^s 8^d	2^b 8^s 4^d
	20	20
	1960	40
	18	8
	1978	48
	12	12
	3956	96
	1978	48
	23736	576
	8	4
dividendo.	23744	580 *divisore*
	544	40^l 18^s $9^d\frac{3}{29}$
	20	
	10880^{soldi}	
	5080	
	440	
	12	
	5280^{denari}	
	60	

427*. *Secondo caso.* In questo caso il divisore è, o può considerarsi come un numero astratto, per cui il quoziente deve essere dello stesso genere del dividendo, e *la divisione può sempre ridursi a quella di un numero concreto per un numero astratto.*

Esempio I. Una somma di 448^{lire} 10^{soldi} 3^{denari} deve distribuirsi a 24 persone; si domanda quanto spetterà a ciascuno? Qui trattandosi di decomporre il numero proposto in 24 parti eguali, il divisore è realmente un numero astratto, *e la divisione si eseguirà come sui numeri interi, ma a più riprese, formando di ogni resto un nuovo dividendo, con ridurlo in unità della specie seguente ed aggiungervi le unità della stessa specie contenuta nel numero proposto, e così continuando sino all' ultima specie.*

	448^l	10^s	3^d	24
	208			18^l 13^s 9^d $\frac{1}{8}$
1° *resto.*	16			
	20			
	320^s			
	10			
2° *dividendo.* .	330			
	90			
2° *resto.*	18			
	12			
	216^d			
	3			
3° *dividendo.* .	219			
ultimo resto. .	3			

Si sono divise 448 *lire* per 24, e si è ottenuto il quoziente 18 *lire* ed il resto 16 *lire;* questo resto si è

moltiplicato per 20 e si sono ottenuti 320 *soldi*, aggiunti ai quali i 10 *soldi* del numero proposto, si è avuto il 2° dividendo 330 *soldi*, che ha dato per quoziente 13 *soldi* e per resto 18 *soldi;* questo secondo resto si è ridotto in denari moltiplicandolo per 12, al prodotto 216 *denari* si sono aggiunti i 3 *denari* del numero proposto, e si è ottenuto il 3° dividendo 219 *denari*, che diviso per 24 ha dato per quoziente $9\frac{3}{24}$.

Esempio II. Con 1350 *lire*, 14 *soldi*, 10 *denari* si sono comprate 58 *braccia*, 6 *soldi*, 8 *denari* di panno; si domanda quanto si è pagato per ogni braccio. Cambiando il divisore $58^b\ 6^s\ 8^d$ in frazione ordinaria, si avrà $\frac{175}{3}$, e l'operazione sarà ridotta a dividere la proposta somma di lire, soldi e denari, per la frazione $\frac{175}{3}$, cioè a moltiplicarla per 3 e dividerla per 175. La moltiplicazione si eseguirà con le regole già date, e la divisione col metodo usato nell'esempio precedente.

428*. Passiamo adesso a dire qualche cosa della divisione delle quantità espresse in unità quadrate o cubiche. È chiaro in prima che il quoziente sarà un numero astratto se si tratta di dividere unità quadrate per unità quadrate, o unità cube per unità cube; esprimerà unità lineari se dovranno dividersi unità cube per unità quadrate o unità quadrate per unità lineari. Ciò posto, supponiamo si voglia dividere $324^{bc}\ 391^{sc}\ 756^{dc}$ per $18^b\ 4^s\ 6^d$. Il metodo da tenere è il seguente

$$324^{bc} \qquad 391^{sc} \qquad 756^{dc} \qquad\Big|\qquad 18^{b} \qquad 4^{s} \qquad 6^{d}$$

$$324\,\frac{6263}{128000} \qquad 391\,\frac{7}{16} \qquad \frac{756}{1728}=\frac{7}{16} \qquad\Big|\qquad 18\,\frac{9}{40} \qquad 4\,\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2}$$

$$\frac{1478263}{128000} \qquad \frac{6263}{16}\,sc=\frac{6263}{16\times 8000}\,bc \qquad\Big|\qquad \frac{9}{2}\,s=\frac{9}{2\times 20}\,b$$

$$\frac{1478263}{128000} : \frac{2332800}{128000} \qquad\Big|\qquad \frac{729}{40}=\frac{729\times 3200}{40\times 3200}=\frac{2332800}{128000}$$

1478263 | 2332800 → $17^{bq}\ 312^{sq}\ 39^{dq}\ \frac{78}{81}$

18150263

1820663 | 5832 → 312^{sq} . . . . $1820663\times\frac{400}{2332800}=\frac{1820663}{5832}$

7106

12743

1079

3

3237 | 81 → $39^{dq}\ \frac{78}{81}$ . . . $1079\times\frac{3\times 48}{5832}=1079\times\frac{3}{81}=\frac{3237}{81}$

807

78

Abbiamo ridotto i numeri dati in frazioni ordinarie dello stesso denominatore, ed eseguita la divisione sui numeratori, e poichè il quoziente doveva esprimere braccia quadrate, abbiamo considerato il dividendo come un numero di braccia quadrate e il divisore come numero astratto. Trovato il primo resto della divisione esprimente braccia quadrate, abbiamo ridotto in soldi quadrati la frazione di braccia quadrate $\frac{1820663}{2332800}$, e per far ciò invece di moltiplicare il numeratore per 400, giovandoci di una proposizione già dimostrata, abbiamo diviso il denominatore per questo numero. Lo stesso procedimento abbiamo seguito per ridurre i soldi quadrati in denari quadrati.

Esercizi.

I. Sotto un egual volume l'acqua pesa 773 volte più dell'aria. Si domanda il peso di lit. 825,371 d'aria.

II. Si domanda il peso d'aria spostato da chil. 1563 di rame, sapendo che questo metallo pesa 8,167 volte più dell'acqua sotto lo stesso volume.

III. Quanti centimetri cubi sono in una massa di oro puro che costa 753 fr., sapendo che l'oro pesa, a egual volume, 19 volte più dell'acqua, e vale, a peso eguale, 15,5 volte più dell'argento?

IV. Qual è il peso di lit. 32,732 d'acqua a 30°, sapendo che il volume dell'acqua a 30° è eguale al prodotto del suo volume a 4° per la frazione 1,00437?

V. Una miniera di carbone dà in 15 giorni 1294 balle di carbone ciascuna delle quali contiene ett. 11,25. La spesa giornaliera è di fr. 475,75. Quanto costerà un ettolitro di carbone?

VI. Per trasportare il carbone mediante una strada ferrata si pagano fr. 0,097 per tonnellata e per chilometro. Si paga inoltre un diritto fisso di fr. 2,12 per vagone contenente ett. 3240. A quanto verrebbero ett. 28275,65 comprati al prezzo di fr. 2,85 l'ettolitro, e trasportati mediante la strada ferrata a miriametri 15,97? L'ettolitro di carbone pesa 82 chilogrammi.

VII. I dati essendo gli stessi di quelli del quesito precedente, si suppone che il capo di nna fabbrica paghi annualmente alla strada ferrata 2580 franchi per trasportare i suoi carboni, ad una distanza di miriam. 2,375: calcolare il numerc d'ettolitri trasportati.

VIII. Il minerale di una fabbrica di piombo è stato ridotto, mediante preparazioni meccaniche, a contenere 0,794 del suo peso in piombo; la fabbrica possiede 4 fornelli, ciascuno dei quali può trattare 1295 chilogrammi di minerale in 12^{ore},35', la perdita in piombo è di 11 per 100 del metallo

contenuto nel minerale. Quanti giorni bisogna lavorare ogni anno, affinchè la prodnzione annuale si elevi a 16000 quintali di piombo?

IX. Adottando i dati del quesito precedente e supponendo che il piombo fabbricato contenga 0,00032 di argento e che 0,02 di questo argento si perda nell' operazione mediante la quale si estrae dal piombo, quanti fornelli a piombo vi bisognano perchè la fabbrica produca annualmente la quantità di argento contenuta in nn milione di franchi della nostra moneta? (Si suppone che il numero delle giornate di lavoro dei fornelli sia quello che risulta dal calcolo precedente.)

X. I fili di ferro di prima qualità comportano, senza rompersi, un peso di 80 chil. per millimetro quadrato di sezione trasversale, ma non è prudenza di oltrepassare il quarto di questo limite. Una gomena di filo di ferro sostiene un peso massimo di chil. 1500, qual è il numero totale dei fili che si debbono impiegare a comporla, il diametro di un filo essendo di met. 0,0034? (La soluzione di questo problema esige qualche nozione di geometria).

XI. Cercare la massima comun misura tra la circonferenza intera e l' arco di 23 gradi 41 minuti 32 secondi $\frac{4}{13}$ di secondo.

XII. Qual' è il peso della moneta di venti franchi, sapendo che il valore dell' oro è quindici volte e mezzo quello di un peso eguale di argento?

XIII. Il valore del rame, nella moneta di rame, essendo quaranta volte minore di quella di nn peso eguale d'argento, qual è il peso della moneta di un decimo?

XIV. 27 monete di cinque franchi poste l' una accanto all' altra fanno un metro: qual è il diametro di una moneta di cinque franchi?

XV. 2 monete di due franchi, e 2 moneto di un franco fanno un decimetro. Il diametro della moneta di un franco è i $\frac{23}{27}$ di quello della moneta di due franchi. Qual è il diametro di ciascuna moneta?

CAPITOLO XVIII.

APPLICAZIONE DELLA TEORIA DEI RAPPORTI.

—

Delle grandezze proporzionali.

429. Si dice che due grandezze sono proporzionali l'una all'altra, quando due valori qualunque della prima hanno lo stesso rapporto dei valori corrispondenti della seconda. La geometria, la meccanica, la fisica fanno conoscere grandezze proporzionali le une alle altre. In aritmetica, non si ha per oggetto di dimostrare questa proporzionalità; essa si ammette come un fatto che serve alla soluzione dei problemi relativi a queste grandezze.

Esempio. Il salario di un operaio è, in generale, proporzionale al tempo per il quale s'impiega. La quantità di viveri necessaria per un bastimento è proporzionale alla lunghezza del viaggio che si vuole intraprendere.

430. Osservazione. È difficile che una grandezza dipenda esclusivamente da un'altra; spesso molte circostanze diverse influiscono sul suo valore. Si dice allora che due grandezze sono proporzionali quando cambiando una di esse, e tutte le altre circostanze rimanendo le stesse, due valori qualunque della prima sono proporzionali ai valori corrispondenti della seconda.

Esempio. Se si dice: il peso di una verga di ferro è proporzionale alla sua lunghezza; si suppone che gli altri elementi che concorrono a determinare il peso (la larghezza e la spessezza) non varino.

431. *Una grandezza può essere ad una volta proporzionale a più altre.*

Perchè ciò possa essere basta che una qualunque di queste grandezze venendo a variare, mentre le altre restano costanti, la grandezza considerata sia proporzionale a quella che varia.

ESEMPIO. Il prezzo di una pezza di stoffa è proporzionale alla sua lunghezza, alla sua larghezza e al prezzo del metro quadrato della stoffa.

Delle grandezze inversamente proporzionali.

432. Si dice che due grandezze sono inversamente proporzionali l'una all'altra, quando due valori qualunque dell' una hanno un rapporto inverso a quello dei valori corrispondenti dell' altra.

ESEMPIO. Se un vascello ha una quantità determinata di viveri, il viaggio che può intraprendere è inversamente proporzionale al numero di uomini che compongono il suo equipaggio; cioè che se questo numero diviene doppio o triplo, la lunghezza del viaggio dovrà essere ridotta alla metà o al terzo; se il numero di uomini diviene i $\frac{5}{7}$ di ciò che era, il viaggio diverrà i $\frac{7}{5}$.

433. *Una grandezza può essere a una volta proporzionale a certe grandezze e inversamente proporzionale ad altre.*

ESEMPIO. La lunghezza di una pezza di stoffa è proporzionale al prezzo che vale, inversamente proporzionale al prezzo del metro quadrato di stoffa e alla larghezza della pezza.

Cioè, che:

La larghezza restando la stessa come pure la qua-

lità della stoffa, la sua lunghezza è proporzionale al prezzo che costa.

La larghezza restando la stessa come pure il prezzo della stoffa, la lunghezza è inversamente proporzionale al prezzo del metro quadrato.

La qualità della stoffa restando la stessa come pure il prezzo totale, la sua lunghezza è inversamente proporzionale alla sua larghezza.

Osservazione. Negli esempii precedenti, la proporzionalità delle grandezze è *a un di presso* evidente. Per qualcuna di esse, tuttavia, si dovrebbe fare una dimostrazione; ma qui si tratta solamente di definire il senso delle parole *proporzionale e inversamente proporzionale,* e non dimostrare che esse convengono in questo o in quel caso.

Regola per conoscere se due grandezze sono proporzionali.

434. La dimostrazione della proporzionalità di due grandezze non appartiene, come l'abbiamo già detto, all'aritmetica, ma appartiene, in ciascun caso, alla scienza che tratta particolarmente delle grandezze di cui si parla. Alcune grandezze frattanto non si riferiscono a niuna scienza; tali sono la maggior parte di quelle che abbiamo scelto per esempi nelle pagine precedenti. Ora indicheremo due principii per mezzo dei quali si potrà spesso stabilire la loro proporzionalità.

1°. *Se due grandezze sono tali, che se una di esse diventa un certo numero di volte più grande o più piccola, l'altra divenga lo stesso numero di volte più grande o più piccola, queste due grandezze sono proporzionali l'una all'altra.*

Rappresentiamo queste due grandezze colle lettere A e B. Se A diviene un *numero intero* di volte maggiore

o minore, B diverrà per ipotesi, lo stesso numero di volte maggiore o minore. Fa d'uopo provare che, qualunque sieno i valori attribuiti a A, i valori corrispondenti di B saranno proporzionali a loro.

Supponiamo per esempio che la grandezza A sia moltiplicata per $\frac{5}{7}$ e divenga $\frac{5}{7}$ A. Si può concepire che il cangiamento si faccia in due volte, e che la grandezza A divenga prima sette volte più piccola, poi cinque volte più grande. Ma allora la grandezza B diverrà, per ipotesi, successivamente $\frac{B}{7}$, e $\frac{5 \times B}{7}$; il valore che corrisponde a $\frac{5}{7}$ A è dunque $\frac{5}{7}$ B; ora si ha evidentemente:

$$\frac{5}{7} A : \frac{5}{7} B :: A : B,$$

vi ha dunque proporzione tra i due valori di A e i valori corrispondenti di B.

2°. *Se due grandezze sono tali, che se una di esse diventa un certo numero di volte più grande o più piccola, l'altra divenga lo stesso numero di volte più piccola o più grande, queste due grandezze sono inversamente proporzionali l'una all'altra.*

Indichiamo queste due grandezze colle lettere A e B. Se A diventa un *numero intero* di volte più grande o più piccola, B diverrà, per ipotesi, lo stesso numero di volte più piccola o più grande. Bisogna provare che i valori di B saranno sempre inversamente proporzionali a quelli attribuiti ad A, qualunque essi sieno. Supponiamo infatti che A sia moltiplicata per una frazione $\frac{5}{7}$. Si può concepire che il cangiamento si faccia in due volte: che A divenga

prima $\frac{A}{7}$ poi $\frac{5\times A}{7}$, ma allora per ipotesi la grandezza B diverrà $7\times B$, poi $\frac{7\times B}{5}$: ora si ha evidentemente

$$\frac{5\times A}{7} : A :: B : \frac{7\times B}{5};$$

i valori di A sono dunque inversamente proporzionali a quelli di B.

In conseguenza di questi due principii, per stabilire la proporzionalità di due grandezze, basta esaminare il caso in cui una di esse è moltiplicata o divisa per un numero intero.

Esempio I. Se si ammette che per fare un viaggio due, tre .... dieci volte più lungo, o due, tre .... dieci volte meno lungo, vi bisognano due, tre .... dieci volte più, o due, tre .... dieci volte meno di viveri, se ne conchiuderà che la quantità di viveri necessaria è in tutti i casi proporzionale alla durata del viaggio.

Esempio II. È evidente che se il metro quadrato di un panno è due, tre .... dieci volte più caro, o due, tre .... dieci volte meno caro, la lunghezza che si può comprarne con una data somma è due, tre .... dieci volte minore, o due, tre .... dieci volte maggiore. Da ciò si deduce che il prezzo del metro quadrato di panno è in tutti i casi inversamente proporzionale alla lunghezza che si può comprarne con una data somma di danaro.

Regola del tre semplice.

435. Una regola del tre semplice è un quesito nel quale, conosciuto il valore di una grandezza, come pure quello di un'altra grandezza alla quale la prima è direttamente o inversamente proporzionale, si calcola ciò

che diventa la prima per un nuovo valore attribuito alla seconda.

Se le due grandezze sono direttamente proporzionali, la regola è diretta; nel caso contrario è inversa.

Esempio I. *Una fabbrica produce annualmente* 1500 *quintali di rame, e consuma* 4892 *quintali di carbone. Quanto carbone consumerebbe se la produzione annuale si elevasse a* 2755 *quintali?*

La quantità di carbone che si consuma è direttamente proporzionale alla quantità di rame prodotta; in questo esempio si tratta dunque di una regola del tre diretta. Se rappresentiamo con x la cercata quantità di carbone che si consuma, avremo la proporzione

$$1500 : 4892 :: 2755 : x;$$

da cui si trae

$$x = \frac{4892 \times 2755}{1500}.$$

Esempio II. 25 *operai hanno lavorato* 15 *giorni per fare un certo lavoro:* 17 *operai quanto tempo metteranno a fare lo stesso lavoro?*

Il tempo necessario è inversamente proporzionale al numero di operai; in questo esempio la regola è dunque inversa. Se rappresentiamo con la lettera x il numero di giorni cercato, si avrà

$$25 : 17 :: x : 15,$$

da cui si trae

$$x = \frac{25 \times 15}{17}.$$

Osservazione. Nei due esempi precedenti abbiamo ammessa la proporzionalità diretta o inversa delle grandezze considerate. Questa è una *supposizione* che deve essere considerata come facente parte dell' enunciato;

nell' immensa maggiorità dei casi analoghi questa supposizione non è interamente esatta. Se cento operai riuniti in una fabbrica producono un certo lavoro, ciascuno di essi privato del soccorso degli altri non ne produrrà la centesima parte: spesso anche sarebbe incapace di lavorare utilmente.

Regola del tre composta.

436. Una regola del tre composta è un quesito nel quale il valore di una quantità essendo conosciuto, come pure quello di molte altre da cui essa dipende, e a ciascuna delle quali essa è direttamente o inversamente proporzionale, si calcola ciò che diventa questa quantità quando tutte le altre acquistano nuovi valori.

Esempio. 25 *operai lavorando* 11^{ore} *per giorno durante* 18 *giorni, hanno inalzato un muro le cui dimensioni sono: altezza* 3^{m}, *lunghezza* 125^{m}, *spessezza* 0^{m},50. *Quanti giorni bisogneranno a* 33 *operai che lavorano* 10^{ore} *per giorno, per inalzare un muro che ha le dimensioni seguenti: altezza* 4^{m}, *lunghezza* 210^{m}, *spessezza* 0^{m},75?

In quest' esempio si *suppone* che il tempo necessario sia proporzionale a ciascuna delle dimensioni del muro e inversamente proporzionale al numero degli operai, e alla durata del lavoro giornaliero.

Ordinariamente i dati di una regola del tre si dispongono su due linee orizzontali, in modo tale che i due valori di ciascuna specie di grandezza siano l' uno al di sopra dell' altro; così, indicando nel quesito attuale con x il numero di giorni cercato, si scriveranno le due linee seguenti:

Operai.	*Ore.*	*Giorni.*	*Altezza.*	*Lunghezza.*	*Spessezza.*
25	11	18	3	125	0,50
33	10	x	4	210	0,75.

Supporremo che, prendendo per punto di partenza le diverse ipotesi che si trovano nella prima linea, si cambino *successivamente* i numeri 25, 11, 18, 3, 125, e 0,50, nei numeri corrispondenti della seconda linea; e cercheremo quali valori acquisti il numero dei giorni in conseguenza di ciascuno di questi cambiamenti.

Si supporrà in prima che vari solamente il numero degli operai, e di 25 diventi 33, e si cercherà ciò che deve divenire il numero dei giorni di lavoro. Si supporrà poscia che gli operai lavorino 10ore per giorno invece di 11, e si cercherà il numero delle giornate necessarie dopo questo nuovo cambiamento. Finalmente si considererà successivamente l'influenza di ciascuno dei cambiamenti fatti alle dimensioni del muro, in guisa che vi saranno in realtà cinque regole del tre semplici da risolvere; l'ultima darà il risultato domandato.

Questi diversi quesiti s'indicano ordinariamente nel modo seguente:

Operai.	*Ore.*	*Giorni.*	*Altezza.*	*Lunghezza.*	*Spessezza.*
25	11	18	3	125	0,50
33	11	x_1	3	125	0,50
33	10	x_2	3	125	0,50
33	10	x_3	4	125	0,50
33	10	x_4	4	210	0,50
33	10	x	4	210	0,75.

In queste linee orizzontali sono scritti i valori che si suppongono successivamente ai diversi elementi da cui dipende il numero di giorni, e le lettere medianti le quali s'indicano i valori corrispondenti di questo numero di giorni. Cominciando dal valore 18 che è scritto nella prima linea, bisogna calcolare x_1 poi x_2, x_3, x_4, e finalmente x che è la vera incognita del quesito. Ora si hanno evidentemente le proporzioni seguenti:

$$18 : x_1 :: 33 : 25$$
$$x_1 : x_2 :: 10 : 11$$
$$x_2 : x_3 :: 3 : 4$$
$$x_3 : x_4 :: 125 : 210$$
$$x_4 : x :: 0{,}50 : 0{,}75.$$

Per dedurre da queste progressioni il valore di x, il metodo più semplice è di moltiplicarle termine a termine e di sopprimere nel primo rapporto i fattori x_1, x_2, x_3, x_4, che si trovano comuni ai due termini, si avrà così:

$$18 : x :: 33 \times 10 \times 3 \times 125 \times 0{,}50 : 25 \times 11 \times 4 \times 210 \times 0{,}75;$$

da cui si trae

$$x = \frac{18 \times 25 \times 11 \times 4 \times 210 \times 0{,}75}{33 \times 10 \times 3 \times 125 \times 0{,}50}.$$

Tipo generale delle regole del tre composte.

437. Qualunque regola del tre composta è un caso particolare del problema seguente.

Una grandezza M *dipende da molte altre,* A, B, C ...., P, Q, R ....; *essa è proporzionale ad* A, B, C ...., *e inversamente proporzionale a* P, Q, R .... *Si sa che* M *ha un valore conosciuto* m *quando* A, B, C ..., P, Q, R .... *sono rispettivamente eguali ad* a, b, c ..., p, q, r ....; *e si domanda ciò che diverrà quando questi elementi prenderanno i valori* a_1, b_1, c_1 ...., p_1, q_1, r_1.... Invece di cambiare ad una volta tutti gli elementi da cui dipende *M*, si può farli variare uno ad uno; il problema si riduce così a tanti quesiti parziali quanti sono elementi *a, b, c ..., p, q, r ....* Ciascuno di questi quesiti è una regola del tre semplice, giacchè si tratta sempre di valutare il cambiamento che prova una grandezza per la variazione di un solo

elemento al quale essa è direttamente o inversamente proporzionale.

Questi diversi quesiti s' indicano ordinariamente nel modo seguente:

m	a	b	c	p	q	r
x_1	a_1	b	c	p	q	r
x_2	a_1	b_1	c	p	q	r
x_3	a_1	b_1	c_1	p	q	r
x_4	a_1	b_1	c_1	p_1	q	r
x_5	a_1	b_1	c_1	p_1	q_1	r
x	a_1	b_1	c_1	p_1	q_1	r_1.

In queste linee orizzontali sono scritti i valori successivi delle grandezze da cui dipende la grandezza M, come pure le lettere mediante le quali s'indicano i valori corrispondenti di m. Ora, per ipotesi, m essendo proporzionale ad a, b, c, e inversamente proporzionale a p, q, r, si hanno evidentemente le proporzioni

$$m : x_1 :: a : a_1,$$
$$x_1 : x_2 :: b : b_1,$$
$$x_2 : x_3 :: c : c_1,$$
$$x_3 : x_4 :: p_1 : p,$$
$$x_4 : x_5 :: q_1 : q,$$
$$x_5 : x :: r_1 : r.$$

Per dedurre x da queste proporzioni, il metodo più semplice è di moltiplicarle termine a termine e di sopprimere i fattori x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, che sono comuni ai due termini del primo rapporto: si avrà così

$$m : x :: a\times b\times c\times p_1\times q_1\times r_1 : a_1\times b_1\times c_1\times p\times q\times r;$$

da cui si trae

$$x = \frac{m\times a_1\times b_1\times c_1\times p\times q\times r}{a\times b\times c\times p_1\times q_1\times r_1}.$$

Se ne deduce la regola seguente:

Conoscendo il valore m *di una grandezza come pure i valori* a, b, c, p, q, r *di quantità alle quali essa è direttamente o inversamente proporzionale, per calcolare il valore* x *di questa grandezza corrispondente ai valori* a_1, b_1, c_1, p_1, q_1, r_1 *di quelle da cui essa dipende, bisogna moltiplicare* m *per i valori primitivi* p, q, r *delle quantità alle quali è inversamente proporzionale e per i nuovi valori* a_1, b_1, c_1 *di quelle alle quali è direttamente proporzionale, e dividere questo prodotto per i nuovi valori* p_1, q_1, r_1 *delle quantità alle quali la grandezza cercata è inversamente proporzionale, e pei valori primitivi di quelle alle quali essa è direttamente proporzionale.*

Metodo di riduzione all' unità

438. Taluni trovano più semplice presentare la teoria delle regole del tre in un modo alquanto differente. Ci basterà indicare sopra un esempio questo metodo detto di riduzione all'unità.

Riprendiamo il problema trattato innanzi, e scriviamo, come sopra, i dati sopra due linee parallele:

Operai.	*Ore.*	*Giorni.*	*Altezza.*	*Lunghezza.*	*Spessezza.*
25	11	18	3	125	0,50
33	10	x	4	210	0,75.

Il metodo di riduzione all' unità consiste nel calcolare prima ciò che diventerebbe il numero di giorni, se tutti i dati della questione divenissero l' unità, cioè se vi fosse un operaio che lavorasse un' ora per giorno per costruire un muro che avesse 1^m di altezza, 1^m di larghezza e 1^m di spessezza. Fatto questo primo calcolo

se ne deduce facilmente il tempo, che corrisponde ai dati assegnati.

Se invece di 25 operai ne supponiamo un solo, il numero dei giorni necessario diverrà evidentemente 25 volte maggiore, cioè 18×25.

Se invece di 11^{ore} di lavoro ne supponiamo un'ora, il numero dei giorni diverrà evidentemente 11 volte più grande, cioè $18 \times 25 \times 11$.

Se l'altezza invece di essere 3^m divenisse 1^m, il numero di giorni di lavoro necessario diverrà evidentemente 3 volte minore, cioè $\frac{18 \times 25 \times 11}{3}$.

Se la lunghezza invece di essere 125^m divenisse 1^m, il numero di giorni di lavoro diverrà evidentemente 125 volte minore, cioè $\frac{18 \times 25 \times 11}{3 \times 125}$.

Infine, se la spessezza invece di essere $0^m,50$ fosse 1^m, il numero di giorni sarà evidentemente moltiplicato pel rapporto di 1^m a $0^m,50$, cioè per $\frac{1}{0,50}$, e diverrà quindi $\frac{18 \times 25 \times 11}{3 \times 125 \times 0,50}$.

Dunque $\frac{18 \times 25 \times 11}{3 \times 125 \times 0,50}$ è il numero di giorni necessario ad un operaio che lavora un'ora per giorno per fare un muro che ha per dimensioni: 1^m di altezza, 1^m di lunghezza, 1^m di larghezza.

Se supponiamo 33 operai, il numero di giorni sarà 33 volte minore, cioè

$$\frac{18 \times 25 \times 11}{3 \times 125 \times 0,50 \times 33}.$$

Se questi operai lavorassero 10^{ore} per giorno invece di una sola, il numero dei giorni sarà 10 volte minore,

cioè

$$\frac{18\times25\times11}{3\times125\times0{,}50\times33\times10}.$$

Infine se le dimensioni del muro, invece di essere 1, 1, 1, divenissero 4, 210, 0,75, si vedrà al modo stesso che il numero dei giorni di lavoro dovrà moltiplicarsi per questi tre numeri, e divenire finalmente

$$\frac{18\times25\times11\times4\times210\times0{,}75}{3\times125\times0{,}50\times33\times10},$$

ch'è precisamente il risultato trovato (436).

Esercizi.

I. Una grandezza proporzionale a molte altre, è proporzionale al loro prodotto.

II. Se una quantità è direttamente proporzionale a due altre, la prima restando fissa, le altre due saranno inversamente proporzionali l'una all'altra.

III. Se una quantità è direttamente proporzionale ad un'altra ed inversamente proporzionale ad una terza, la prima restando fissa, le altre due saranno direttamente proporzionali l'una all'altra.

IV. La profondità del pozzo di Grenelle è 505^m, e la temperatura del fondo del pozzo 27°,33. La temperatura delle cave dell'Osservatorio, situate a 28^m al disotto del suolo, essendo 1°,7, calcolare la temperatura di uno strato situato ad una profondità di 217^m. Si ammetterà che l'accrescimento di temperatura sia proporzionale alla quantità, per la quale si scende sotto al suolo.

V. La sorgente di Chaudes-Aigues (Cantal), dà acqua a 88°; calcolare mediante i dati del problema precedente, e supponendo che si possa assimilare il suolo dell'Auvergne a

quello di Parigi, da qual profondità proviene l' acqua di questa sorgente.

VI. Una manifattura ha prodotto nel 1849, 26700 quintali di porcellana; la produzione nel 1850 si è inalzata a 32400. Nel 1849 si sono consumati 37000 quintali di carbone e 2950 quintali di caolino, e nel 1850, 48000 quintali di carbone e 4500 di caolino: il consumo è proporzionale alla produzione?

VII. I dati essendo i medesimi della questione precedente, nel 1849 si sono pagate 80752 giornate di operaio, e nel 1850, 98785. La spesa per mano d'opera è proporzionale alla produzione?

CAPITOLO XIX.

SOLUZIONE DI ALCUNI PROBLEMI.

Regola d'interesso.

439. Chiamasi *interesse* o *frutto* il guadagno che fa sul suo denaro chi lo impresta. Questo guadagno dipende dalla somma imprestata, dal tempo durante il quale s'impresta, e da un terzo elemento, chiamato *tassa* o *ragione* dell'interesse, che è l'interesse di 100 fr. durante un anno.

L'interesse è *semplice* quando la somma imprestata resta la medesima nella durata dell'imprestito; è *composto* quando, al termine di ogni anno, l'interesse si aggiunge al capitale per produrre interesse nell'anno seguente.

Il danaro dato in imprestito si chiama in generale *capitale*. Il frutto o l'interesse di un capitale qualunque per un anno si chiama *rendita*.

Interessi semplici.

440*. Tutti i problemi che possono venir proposti sugl'interessi semplici si risolvono facilmente mediante una formola generale, che ci proponiamo di trovare.

Chiamiamo C un capitale qualunque, t il tempo che rimane impiegato (l'unità essendo l'anno), I l'interesse, r la tassa dell'interesse.

L'interesse è proporzionale al capitale e al tempo; la prima di queste quantità è uguale a I quando le al-

tre due hanno per valori C e t respettivamente; inoltre, la prima quantità è uguale a r quando le altre due hanno 100 e 1 per valori rispettivi. Si ha dunque (437).

$$(1) \qquad I = r\frac{C\times t}{100}$$

La formola (1) permetterà di calcolare una delle quantità I, r, C, t, quando sieno conosciute le altre. In fatti, da questa formola se ne deducono le seguenti:

$$(2) \qquad r = \frac{100\times I}{C\times t},$$

$$(3) \qquad C = \frac{100\times I}{r\times t},$$

$$(4) \qquad t = \frac{100\times I}{C\times r}.$$

441. PROBLEMA I. *Trovare la rendita quando sono dati il capitale e la tassa dell'interesse.*

Questo problema si risolve mediante la formola (1), nella quale si fa $t = 1$, $I = R$, rappresentando con R la rendita. Allora quella formola diventa

$$R = \frac{C\times r}{100}.$$

ESEMPIO. Calcolare la rendita prodotta da un capitale di 75000 fr.; la tassa dell'interesse essendo 5 per 100 (si scrive 5 %).

Si ha $C = 75000$ fr., $r = 5$; e quindi

$$R = \frac{75000\times 5}{100} = 3750 \text{ fr.}$$

REGOLA. *Per trovare la rendita di un dato capi-*

tale basta moltiplicarlo per la tassa dell' interesse divisa per cento.

442. Problema II. *Calcolare l' interesse di un capitale impiegato a una data tassa per un dato tempo.*

Questo problema si risolve mediante la formola

$$I = r\frac{C \times t}{100}.$$

Esempio. Calcolare l' interesse di 38745 fr. impiegati al $4\frac{0}{0}$ durante 15 mesi, cioè $\frac{15}{12}$ di anno.

Si ha $r = 4$, $C = 38745$ fr., $t = \frac{15}{12}$; quindi

$$I = 4\frac{38745 \times \frac{15}{12}}{100} = \frac{38745 \times 5}{100} = 1937^{f},25.$$

443. Problema III. *Calcolare durante quanto tempo un capitale dev' essere impiegato a una data tassa per produrre un dato interesse.*

Questo problema si risolve mediante la formola

$$t = \frac{100 \times I}{C \times r}.$$

Esempio. Dopo quanto tempo 22840 fr. posti a $4\frac{0}{0}$ per anno, avranno prodotto 1000 fr. d' interesse?

Si ha $r = 4$, $C = 22840$ fr., $I = 1000$ fr.; quindi

$$t = \frac{100 \times 1000}{22840 \times 4} = \frac{2500}{2284} = 1 \text{ anno, } 1 \text{ mese, } 4 \text{ giorni.}$$

444. Problema IV. *Calcolare a qual tassa è stato impiegato un dato capitale che in un dato tempo ha prodotto un dato frutto.*

Questo problema si risolve mediante la formola

$$r=\frac{100\times I}{C\times t}.$$

Esempio. ***A qual tassa è stato impiegato il capitale di*** **25000 fr., che in tre mesi ha dato per frutto 400 fr.?**

Si ha $I=400$ fr., $C=25000$ fr., $t=\frac{1}{4}$; e quindi

$$r=\frac{100\times 400}{25000\times \frac{1}{4}}=\frac{160}{25}=6^{f},40.$$

445*. Osservazione. L'espressione

$$I=r\,\frac{C\times t}{100},$$

che abbiamo trovata innanzi, richiede il calcolo della frazione t. A quest' oggetto non crediamo inutile aggiungere le seguenti considerazioni.

Supponiamo che il capitale di 25000 fr. sia stato impiegato pei mesi di Aprile, Maggio e Giugno e 10 giorni di Luglio alla tassa del 6 %; l' espressione precedente darebbe

$$I=\frac{25000\times 6\times \frac{101}{365}}{100}=1500\times\frac{101}{365}=415,07.$$

Il valore di I nell' ipotesi adottata nei problemi precedenti che i mesi sono eguali e di 30 giorni ciascuno, sarebbe dato dall' espressione

$$I=1500\times\frac{100}{360}=416,67.$$

Come si vede, la differenza tra il valore esatto e quello approssimato è assai piccola, e questo accade perchè se da una parte, procedendo a questo modo, si trascura

qualche giorno nella valutazione del tempo t, dall'altra l'anno si considera di soli 360 giorni, il che stabilisce un certo compenso nel valore della frazione t. L'errore può del resto essere in più o in meno secondo i casi.

I negozianti poi adottano generalmente un'altra maniera per valutare gli interessi, la quale conduce spesso ad errori maggiori. Essi infatti esprimono il tempo esattamente in giorni, ma suppongono l'anno di soli 360 giorni; in questa ipotesi, e tenendo fermi i dati precedenti, si avrebbe

$$I = 1500 \times \frac{101}{360} = 420{,}83,$$

valore notabilmente maggiore di 415,07.

Osserviamo ora che il valore di I può scriversi

$$I = 25000 \times \frac{6}{100} \times \frac{101}{360} = 25 \times 6 \times \frac{101}{36} = 25 \times \frac{101}{6};$$

e quest' ultima espressione dimostra che *l' interesse di un capitale al 6 % si ottiene moltiplicando la millesima parte del capitale pel numero di giorni corrispondenti al tempo in cui è posto al frutto, e prendendo la sesta parte del prodotto.* Questo modo di operare riesce molto comodo, quando si tratta di calcolare il frutto di diversi capitali alla stessa tassa del 6 %: per esempio, 57 giorni d'interessi sul capitale 2450, 18 giorni sul capitale 15000, 91 giorni sul capitale 3000 ec., si calcoleranno aggiungendo insieme i prodotti $2{,}45 \times 57$, 15×18, 3×91, ec., e prendendo il sesto della somma.

Se la tassa è diversa dal 6 %, si calcola prima l'interesse al 6, e al risultamento vi si aggiunge o vi si toglie, secondo le circostanze, una parte aliquota corrispondente alla differenza delle tasse. Così l'interesse al $7\frac{1}{2}$ % per 65 giorni sul capitale 24000, si ha calco-

lando il $6\frac{2}{3}$ ed aggiungendovi la sua quarta parte; ma l'interesse al $6\frac{2}{3}$ è $\frac{24\times65}{6}=260$, dunque l'interesse al $7\frac{1}{2}$ è $260+\frac{260}{4}=325$.

Regola di sconto.

446*. Per agevolare le contrattazioni, specialmente da un paese all'altro, si usano in commercio alcune carte dette *cambiali* o *boni* nelle quali un negoziante promette il pagamento di una somma di denaro alla fine di un tempo determinato. Chi possiede una di queste carte, quando è trascorso il tempo stabilito, o come suol dirsi, alla *scadenza* della cambiale o del bono, si presenta al negoziante e riceve la somma promessa; ma se gli bisognasse il denaro prima della scadenza, potrà ritirarlo dallo stesso negoziante, o anche da un altro, rilasciandogliene una parte a titolo d'interesse o guadagno, il quale in questo caso si chiama *sconto.*

447. Nel commercio lo sconto è l'interesse calcolato durante il tempo della scadenza sul valor nominale della cambiale, cioè sulla somma che si paga alla scadenza; e questo modo di calcolare lo sconto si chiama *sconto all' infuori.*

Esempio. Una cambiale di 1500 fr. *scade* fra cinque mesi, la tassa dell'interesse essendo 5 per 100; quale sarà lo sconto all' infuori, se si vuole essere pagati immediatamente?

Lo sconto cercato è, per convenzione, l'interesse di 1500 fr. per 5 mesi o $\frac{5}{12}$ di anno; esso è dunque

$$1500\times\frac{5}{12}\times0{,}05=31^{f},25.$$

Osservazione. Nell' esempio precedente, la somma pagata cinque mesi prima del fissato è $1500^f - 31^f,25$, cioè $1468^f,75$; tuttavia il negoziante ritiene l' interesse di 1500 fr.; dunque la convenzione che serve di base alla regola di sconto al di fuori non è giusta.

448*. Vi ha un secondo modo per calcolare lo sconto che chiamasi *sconto al di dentro*, e che è più razionale del precedente. Vediamo in che consiste.

Supponiamo che uno possegga una cambiale la cui somma è rappresentata da C, e che scade alla fine del tempo t; il possessore di questa cambiale non vuole aspettare il tempo stabilito e preferisce essere pagato immediatamente; qual somma gli deve pagare il negoziante? Sia r la tassa dell' interesse; se il negoziante ritenesse la somma C pel tempo t ne ritrarrebbe un frutto che perde anticipandola, ed è questo lo *sconto* che giustamente gli si deve. Ora, la somma C promessa nella cambiale può considerarsi come il valore che acquista dopo il tempo t un capitale x impiegato alla tassa di r %; questo capitale x è quello che deve ricevere il possessore della cambiale. Ma per la formola (1), l' interesse prodotto nel tempo t dal capitale x alla tassa di r %, è dato da $\frac{r \times t \times x}{100}$; dunque deve aversi

$$C = x + \frac{r \times t \times x}{100} = \left(1 + \frac{r \times t}{100}\right) x;$$

e per conseguenza

$$x = \frac{C}{1 + \frac{r \times t}{100}} \dots\dots (A).$$

Lo sconto sarà dato dalla formola

$$C - x = C - \frac{C \times 100}{100 + r \times t} = \frac{C \times r \times t}{100 + r \times t}.$$

ESEMPIO. Supponiamo che una cambiale di 700 fr. scada fra 7 mesi; calcolare lo sconto al di dentro, la tassa essendo 5 %.

Si ha $C=700$, $r=5$, $t=\frac{7}{12}$; quindi

$$C-x=\frac{700\times5\times\frac{7}{12}}{100+5\times\frac{7}{12}}=\frac{4900}{247}=19^{f},84.$$

Della rendita consolidata.

449*. Quando un Governo contrae qualche debito, prendendo denaro a prestito da particolari negozianti o banchieri, suole ordinariamente compensarli con creare e cedere a loro favore una *rendita* corrispondente al capitale ricevuto, la quale si paga a rate semestrali dal suo tesoro; riservandosi di *estinguere* a poco a poco il capitale secondo che le sue finanze glielo permettono. I primi proprietari di quella rendita sono dunque i negozianti che hanno fatto l'imprestito, ma per comodità del commercio è stabilito che essa possa cedersi ad altri, restando a cura del Governo di fare *iscrivere* i nomi dei nuovi possessori in un apposito registro che suol chiamarsi *Gran libro*, affinchè godano, invece degli antichi, de' pagamenti semestrali. La *rendita*, detta *consolidata* o *iscritta*, diviene quindi una mercanzia, che si compra e vende come qualunque altra, e però il suo prezzo varia a norma delle ricerche; è chiaro poi che un tal prezzo rappresenta il capitale corrispondente alla rendita. Il Governo nel creare la rendita suol destinare anche un fondo annuale per la sua *ammortizzazione*, cioè suole impiegare annualmente una somma stabilita a comprare dai particolari una porzione di rendita consolidata per *annullarla* o *ammortizzarla*, ed estin-

guere così a poco a poco il suo debito. Diminuendo per questo motivo d'anno in anno la quantità della rendita in commercio ne aumenta naturalmente il prezzo, purchè non vi sieno altre cause tendenti a farlo diminuire; come un nuovo imprestito che facesse il Governo, o pure qualche oscillazione commerciale o politica che potrebbe porre in dubbio il pagamento puntuale della rendita.

Le rendite consolidate, offrendo un mezzo comodo e facile d'impiegare il denaro, sono divenute in Europa un ramo importante di commercio, per la qual cosa abbiamo creduto utile di trattare qui appresso le principali questioni che ad esse si riferiscono.

I. Si vogliono acquistare fr. 114 di rendita iscritta al prezzo di fr. $81\frac{3}{4}$; si domanda qual somma si dovrà sborsare? Il prezzo che regola le contrattazioni, come quello che si legge sui *listini* della *Borsa*, suole corrispondere a 5 franchi di rendita annuale; perciò si dovranno sborsare fr. $81\frac{3}{4}$ per ogni 5 franchi di rendita, ed il costo di 114 franchi di rendita si otterrà dalla proporzione

$$5 : 114 :: 81{,}75 : x = \frac{81{,}75 \times 114}{5} = 1863{,}90.$$

Ma questo calcolo si eseguisce con una regola pratica semplicissima; si cerca il costo di un franco di rendita prendendo la quinta parte del prezzo 81,75, che si ha raddoppiando la sua decima parte, ed indi si moltiplica quel costo pel numero 114 indicante la quantità della rendita che si vuol comprare. In altro modo, si moltiplica la decima parte del prezzo pel doppio della rendita da acquistarsi, e si ottiene il costo totale della rendita; così 153^{f} di rendita a $99\frac{7}{8}$ importano $9{,}9875 \times 306 = 3056{,}17\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{r} 8{,}175 \\ 2 \\ \hline 16{,}350 \\ 114 \\ \hline 6540 \\ 1635 \\ 1635 \\ \hline 1863{,}90 \end{array}$$

Dalla proporzione precedente avendosi $x = 81{,}75 \times \frac{114}{5}$, si vede ancora che la somma da sborsarsi per acquistare una data quantità di rendita si può calcolare moltiplicando il quinto di quella rendita per il prezzo di 5 franchi. E considerando in questa moltiplicazione il quinto della rendita da acquistarsi come moltiplicando, ed il prezzo di 5 franchi come moltiplicatore, è chiaro che crescendo o diminuendo un tal prezzo di una o più unità, il prodotto crescerà o diminuirà di una o più volte il quinto della rendita, cioè *per ogni unità di aumento o di diminuzione del prezzo di* 5 *franchi*, *il costo totale di una data quantità di rendita da acquistarsi cresce o diminuisce del quinto di quella rendita.* Infatti, 114 franchi di rendita a $82\frac{3}{4}$ costano fr. 1886,70, e questa somma supera di $22{,}8 = \frac{114}{5}$ il costo degli stessi franchi 114 trovato di sopra al prezzo di $81\frac{3}{4}$.

Se per l'acquisto di una data quantità di rendita si fosse sborsata una certa somma, e si volesse conoscere il prezzo al quale si è comprata quella rendita, da ciò che precede chiaramente appare che bisognerebbe *dividere la somma sborsata per la quinta parte della rendita;* o, ciò che vale lo stesso, *dividere il decuplo della somma sborsata per il doppio della rendita.*

II. Si domanda, quanta rendita iscritta si può comprare con fr. 1863,90 al prezzo di $81\frac{3}{4}$? La proporzione $81{,}75 : 1863{,}90 :: 5 : x = 114$ risolve il problema, ma il valore d'x si ottiene più facilmente *cercando, come sopra, il costo* 16,35 *di un franco di rendita e dividendo per questo numero la somma* 1863,90 *da impiegarsi in compra.* Per un altro esempio, si vogliano impiegare 16400 franchi in compra di rendita consolidata a 74: l'operazione per trovare la quantità della

rendita consisterà in dividere 16400 per 14,8 (il quale numero si ottiene raddoppiando la decima parte di 74) ed il quoziente 1108,11 indicherà la rendita che si può acquistare. Ma si avverte che per semplicità di scrittura, il Gran Libro non permette se non l'acquisto di un numero intero di franchi di rendita, cominciando da un franco.

III. Si vuol sapere a che ragione s'impiegherà il denaro comprandone rendita al prezzo di $81\frac{3}{4}$? Il valore della ragione si potrà dedurre dalla proporzione

$$81\tfrac{3}{4} : 100 :: 5 : x = \frac{500}{81\tfrac{3}{4}} = 6\tfrac{1}{8} \text{ circa.}$$

Interessi composti.

450. Una somma dicesi posta ad *interessi composti* o a *moltiplico* quando è stabilito che gl'interessi che *maturano* alla fine di ogni anno si aggiungano al capitale e producano insieme con esso il frutto dell'anno seguente, e così per più anni successivi sino alla restituzione del capitale con tutti gl'interessi, ed interessi d'interessi riuniti.

451. Problema I. *Calcolare ciò che diventa una somma posta a interessi composti durante un dato numero di anni.*

Indichiamo questa somma con la lettera C, con r la tassa dell'interesse, e finalmente con n il numero di anni nel quale la somma C è impiegata.

L'interesse di C durante il primo anno sarà $\frac{C \times r}{100}$; per conseguenza la somma C dopo un anno sarà divenuta

$$C + \frac{C \times r}{100} = C\left(1 + \frac{r}{100}\right).$$

Quindi per calcolare ciò che diventa una somma dopo essere stata impiegata un anno, bisogna moltiplicarla per $1+\frac{r}{100}$. Questa regola è generale; essa dunque si applica alla somma $C\left(1+\frac{r}{100}\right)$, che per conseguenza diverrà alla fine del second' anno

$$C\left(1+\frac{r}{100}\right)\left(1+\frac{r}{100}\right)=C\left(1+\frac{r}{100}\right)^2.$$

Continuando a ragionare nel modo stesso, si vedrà che ogni anno il capitale si moltiplica per il fattore costante $\left(1+\frac{r}{100}\right)$, e che per conseguenza, dopo n anni, esso sarà moltiplicato per $\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$, in guisa che il capitale C, dopo essere stato impiegato n anni, sarà divenuto:

$$C'=C\left(1+\frac{r}{100}\right)^n. \tag{1}$$

452. Osservazione I. Se la somma C non fosse impiegata per un numero intero di anni, la formula (1) darebbe ciò che diviene la somma durante il maggior numero di anni contenuto nel tempo che si tiene impiegata; a questa somma si aggiungerebbe poi l' interesse che produce durante la frazione di anno che resta.

453*. Osservazione II. Nell' applicazione della formola (1) sarà utile fare uso dei logaritmi; allora si ha subito

$$\log C'=\log C+n\log\left(1+\frac{r}{100}\right). \tag{2}$$

Per dare un esempio di questa formola, supponiamo di voler trovare il valore del capitale 12540 franchi

posto a interessi composti, al 5 per 100, dopo 7 anni.

La formola precedente diventa

$$\log C' = \log 12540 + 7 \log 1{,}05;$$

e si ha

$$\begin{array}{ll}
\log 12540 \ldots\ldots\ldots & = 4{,}0982975 \\
\log 1{,}05 = 0{,}0211893. & \\
7 \log 1{,}05 \ldots\ldots\ldots & = 0{,}1483251 \\
\hline
\log C' \ldots\ldots\ldots & = 4{,}2466226 \\
\log 17645 \ldots\ldots\ldots & = 4{,}2466217 \\
 & \phantom{4{,}246621}9 \\
 0{,}04 & \\
C' = 17645{,}04 &
\end{array}$$

Quando n è frazionario, invece di usare il metodo esposto innanzi (452) si può fare uso della formula (2); la differenza è insensibile.

Esempio. Qual è il valore del capitale 12540 franchi, posto a interessi composti al 5 per 100, dopo 7 anni, 8 mesi?

Dopo 7 anni il capitale diventa 17645,04; questo nuovo capitale in 8 mesi produce 588,17: dunque dopo 7 anni, 8 mesi, il capitale diventa 18233,20.

Dando a n il valore frazionario $7 + \frac{8}{12}$, si trova 18228,40; la differenza è 4,80; questa è una quantità relativamente piccolissima; essa è minore di $\frac{1}{3000}$ della grandezza cercata.

454*. Osservazione III. La formola (2) permette ancora di risolvere il seguente problema:

In quanti anni si raddoppia un capitale C *posto a interessi composti ad una data tassa?*

In questo caso si ha $C' = 2C$, e quindi

$$2C = C\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n;$$

dividendo per C e prendendo i logaritmi, si ha

$$log\,2 = n\,log\left(1 + \frac{r}{100}\right);$$

da cui

$$n = \frac{log\,2}{log\left(1 + \frac{r}{100}\right)};$$

Vi è pure una regola pratica per risolvere questo problema, utile a conoscere sebbene la sua dimostrazione dipenda da considerazioni di algebra.

La regola è la seguente:

Per trovare in quanti anni si raddoppia un capitale posto a moltiplico ad un dato interesse, si dividerà il numero 69 $\frac{1}{3}$ *per quell'interesse, ed al quoziente si aggiungerà* $\frac{1}{3}$.

Se l'interesse è del 5 per 100, la formola dà 14 anni e 74 giorni, e la regola precedente dà 14 anni e 72 giorni.

455. Problema II. *Qual somma bisogna porre a interessi composti, per produrre dopo* n *anni un dato capitale?*

Questo problema si risolve anche colla formola (1); l'incognita invece di essere C' è C; e si ha

$$C = \frac{C'}{\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n};$$

da cui

$$log\ C = log\ C' - n\ log\left(1+\frac{r}{100}\right).$$

Osservazione. Il problema precedente può enunciarsi così: *Qual è il valore attuale di un capitale* C' *pagabile in* n *anni?*

Se C, C', n fossero conosciuti, si avrebbe per determinare r la formola

$$log\left(1+\frac{r}{100}\right) = \frac{1}{n}(log\ C' - log\ C).$$

Rendite perpetue. Annualità.

456. Una rendita perpetua è una somma che si deve riscuotere *indefinitamente* alla fine di ogni anno. Supponendo la tassa dell'interesse stazionaria ed eguale, per esempio, a 5 per 100, un capitale di 100 franchi vale una rendita perpetua di 5 franchi, reciprocamente una rendita perpetua di 5 franchi vale 100 franchi.

457. Problema I. *Calcolare il valore di una rendita perpetua data, essendo conosciuta la tassa dell' interesse.*

Sieno a la somma che si deve riscuotere alla fine di ogni anno, e r la tassa dell'interesse. Si tratta di cercare il capitale che produce annualmente a franchi d'interesse, cioè una rendita perpetua di a franchi. Questo capitale C è dato dalla proporzione

$$C : 100 :: a : r,$$

da cui

$$C = \frac{100 \times a}{r};$$

tal è dunque il valore di una rendita perpetua di a franchi.

Osservazione. 100 fr. equivalendo a una rendita di 5 fr., il cui prossimo pagamento è ancora lontano di un anno; il valore precedente di C è dunque anche relativo al caso in cui il primo pagamento della rendita perpetua non deve aver luogo che in capo ad un anno.

458. Problema II. *Trovare il valore di una rendita di* a *franchi per anno, il cui primo pagamento non deve aver luogo che dopo* n *anni.*

Dopo $n-1$ anni, il primo pagamento dovrà farsi in capo ad un anno; gli altri gli succederanno regolarmente. La rendita perpetua varrà dunque allora (457).

$$\frac{a\times100}{r}.$$

Si può quindi assimilare questa rendita ad una somma $\frac{a\times100}{r}$ pagabile fra $n-1$ anni, il cui valore attuale è

$$\frac{a\times100}{r}\times\frac{1}{\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n-1}}.$$

459. Una *annualità* è una rendita pagabile durante un numero limitato di anni.

Problema I. *Calcolare il valore attuale di una annualità di* a *franchi, pagabile per* n *anni, il primo pagamento dovendo aver luogo dopo un anno.*

La tassa dell'interesse si suppone essere di r per 100.

Una annualità pagabile per n anni, può essere considerata come la differenza di due rendite perpetue, il primo pagamento della prima dovendo aver luogo fra un anno, e quello della seconda fra $n+1$ anni. Il valore

attuale della prima di queste rendite è (454) $\frac{a\times 100}{r}$ e quello della seconda (445) $\frac{a\times 100}{r}\times\frac{1}{\left(1+\frac{r}{100}\right)^n}$, la differenza di questi due valori o

$$\frac{a\times 100}{r}-\frac{a\times 100}{r}\times\frac{1}{\left(1+\frac{r}{100}\right)^n}$$
$$=\frac{a\times 100}{r}\left\{1-\frac{1}{\left(1+\frac{r}{100}\right)^n}\right\},$$

è dunque il valore attuale dell' annualità.

460. Problema II. *Qual somma bisogna pagare annualmente per* n *anni onde soddisfare un debito* A, *il primo pagamento dovendo effettuarsi alla fine di un anno, e la tassa dell' interesse essendo di* r *per* 100?

Se a indica l' annualità da pagare, il debito che essa può soddisfare è (459)

$$a\times\frac{100}{r}\left\{1-\frac{1}{\left(1+\frac{r}{100}\right)^n}\right\};$$

si deve dunque avere

$$a\times\frac{100}{r}\left\{1-\frac{1}{\left(1+\frac{r}{100}\right)^n}\right\}=A,$$

e per conseguenza

$$a=\frac{A}{\frac{100}{r}\left\{1-\frac{1}{\left(1+\frac{r}{100}\right)^n}\right\}}.$$

461*. Osservazione. I contratti di prestito ad interesse si fanno ordinariamente per un tempo determinato, trascorso il quale, il debitore è obbligato a restituire il capitale con tutti gl'interessi arretrati, qualora non li avesse pagati esattamente alle loro *scadenze*. Ma per rendere più facile la restituzione del capitale spesso si conviene di farla in *rate*, di cui è definita la quantità e l'epoca del pagamento; e siccome in questo caso gl'interessi, dopo il pagamento di una o più rate, non ricadono più sull'intero capitale, ma vanno a mano a mano scemando, così prendono il nome d'interessi a *scalare*. Per esempio un capitale di 8000 franchi è dato ad interesse col patto di doversi restituire in quattro rate eguali pagabili alla fine di ciascun anno, oltre gli interessi maturati; ed in questo modo di contrattazione, qualunque sia la tassa dell'interesse, il capitale sarà sempre *estinto* nel tempo stabilito di quattro anni, poichè alla fine del primo anno il debitore pagherà 2000 franchi più gli interessi calcolati sull'intero capitale, alla fine del secondo anno pagherà 2000 franchi più gli interessi sul capitale ridotto a franchi 6000, e similmente per gli altri due anni. Se però si conviene che la rata di 2000 franchi debba essere l'unico pagamento da farsi alla fine di ciascun'anno, una parte di questa somma sarà destinata a sodisfare gli interessi e la rimanente andrà in diminuzione dal capitale, ed è chiaro che quest'ultima porzione sarà tanto più grande quanto minore è la prima, cioè quanto minore è la tassa dell'interesse, dalla quale per conseguenza dipenderà pure il tempo della totale estinzione del capitale. Quest'ultima specie di interessi a scalare si calcola mediante l'ultima formola che abbiamo trovata. Quando è data l'annualità da pagare e si vuol sapere in quanto tempo il debito sarà estinto, bisognerà ricavare dalla formola anzidetta

il valore di n. Ora si ha

$$1-\frac{1}{\left(1+\frac{r}{100}\right)^n}=\frac{r\times A}{a\times 100},$$

da cui

$$\left(1+\frac{r}{100}\right)^n=\frac{a\times 100}{a\times 100-r\times A};$$

e prendendo i logaritmi

$$n\log\left(1+\frac{r}{100}\right)=\log(a\times 100)-\log(a\times 100-r\times A),$$

da cui

$$n=\frac{\log a\times 100-\log(a\times 100-r\times A)}{\log\left(1+\frac{r}{100}\right)}.$$

462*. Il possessore di un capitale di 10000 franchi, per esempio, può riscuoterne una rendita perpetua di 500 franchi, supposto che la tassa dell'interesse sia il 5 per 100; ma può ancora dare questa somma a prestito e convenire che per un certo tempo gli sia pagata l' annualità di 1000 franchi sino a che il capitale sia esaurito; il tempo si troverà mediante l' ultima formola. È una convenzione di questa specie quella che si fa pei *vitalizi*. Il vitalizio consiste in una annualità che si paga ad alcuno durante la sua vita, a titolo di restituzione di un capitale ricevuto da lui a prestito ad una convenuta ragione. Se il possessore di un capitale potesse conoscere la durata della propria vita, non avendo eredi cui lasciare la sua proprietà, e con essa la rendita che ne deriva, gli converrebbe cavarne un' annualità o rendita maggiore, e tale che lo rimborsasse mentre vive del suo capitale, che si estinguerebbe alla sua morte. Ma quantunque sia impossibile determinare la durata speciale della vita di un individuo, dalle *Tavole di mortalità* si può desu-

mere quanto probabilmente rimane di vita ad una persona qualunque di conosciuta età. Questo calcolo fondato sull'esperienza di moltissimi anni e di moltissime persone, se può esser fallace per una data individualità, è però sempre esatto nel complesso di molti casi simili, e serve a regolare i contratti di vitalizio secondo l'età ossia stabilire l'annualità, o rendita *vitalizia,* da pagarsi invece della rendita ordinaria, corrispondentemente al capitale che si riceve ed alla tassa dell'interesse convenuto.

Nella seguente tavoletta si veggono in più colonne registrate 1° *l'età,* 2° *la corrispondente durata della vita,* 3° *la rendita vitalizia* calcolata sul capitale 100 in modo che con quella annualità si compia la restituzione del capitale durante la vita probabile stabilita nella seconda colonna. E siccome l'annualità cambia colla tassa dell'interesse, così la rendita vitalizia si è calcolata in relazione della rendita ordinaria convenuta alle diverse tasse del 4, 5, e 6 per %.

ETÀ.	Durata probabile della vita.	Rendita vitalizia corrispondente al capitale 100, quando l'interesse del denaro è al			ETÀ.	Durata probabile della vita.	Rendita vitalizia corrispondente al capitale 100, quando l'interesse del denaro è al		
		4 %	5 %	6 %			4 %	5 %	6 %
Anni.	*Anni.*				*Anni.*	*Anni.*			
30	29,39	5,85	6,56	7,32	56	13,50	9,84	10,47	11,42
32	28,44	5,99	6,70	7,44	58	12,20	10,52	11,15	11,79
34	26,88	6,14	6,84	7,58	60	11,14	11,50	11,93	12,37
36	25,62	6,31	7,04	7,74	62	10,12	12,21	12,83	13,47
38	24,36	6,50	7,19	7,91	64	9,15	13,26	13,88	14,5
40	23,09	6,71	7,40	8,11	66	8,24	14,48	15,10	15,7
42	21,83	6,95	7,63	8,34	68	7,38	15,90	16,52	17,1
44	20,56	7,23	7,90	8,59	70	6,58	17,57	18,19	18,8
46	19,30	7,53	8,20	8,89	72	5,83	19,56	20,19	20,8
48	18,06	7,88	8,54	9,22	74	5,14	21,90	22,53	23,1
50	16,83	8,28	8,93	9,60	76	4,51	24,63	25,27	25,9
52	15,63	8,73	9,57	10,04	78	3,93	27,98	28,63	29,2
54	19,45	9,25	9,88	10,54	80	3,45	31,60	32,26	32,9

463*. L'uso di questa tavola non è molto difficile. Vogliasi per esempio la rendita vitalizia che una persona di anni 46 deve percepire da un capitale di 2450 franchi, supponendo che la rendita ordinaria si calcoli, nei contratti di prestito, alla ragione del 4 %: si cerchi il numero 46 nella colonna dell'*Età*, e nell'incontro della linea orizzontale di questo numero con la colonna verticale del 4 % si troverà 7,53, che indica la rendita vitalizia di 100 franchi per quell'età; laonde dovendosi per ogni 100 franchi esigere franchi 7,53, si otterrà l'annualità domandata calcolandola come una rendita al 7,53 per 100 sul proposto capitale 2450, e si trova 184,48 $\frac{1}{2}$.

Se l'età fosse 45 $\frac{1}{2}$, è chiaro che a questo numero, il quale non si trova nella tavola ma è compreso fra 44 e 46, dovrà nella colonna del 4 % corrispondere una rendita compresa pure fra 7,23 e 7,53: e supponendo, come è permesso senza errore sensibile, che gli aumenti della rendita vitalizia sieno proporzionali agli aumenti dell'età, si dirà: *un aumento di* 2 *anni da* 44 *a* 46, *sta ad un aumento di* 1 $\frac{1}{2}$ *anni*, *da* 44 *a* 45 $\frac{1}{2}$, *come stanno fra loro gli aumenti sulle rendite corrispondenti; cioè come l'aumento* 0,30, *da* 7,23 *a* 7,53, *sta al quarto termine* x, che rappresenterà l'aumento da darsi alla rendita 7,23 affinchè corrisponda all'età 45 $\frac{1}{2}$, e dopo avere dalla proporzione $2 : 1\frac{1}{2} :: 0,30 : x$, dedotto il valore d'$x = 0,225$, si aggiungerà a 7,23, e si otterrà la rendita vitalizia 7,455 corrispondente all'età 45 $\frac{1}{2}$ sul capitale 100.

Se poi si volesse la rendita vitalizia corrispondente all'età 45 $\frac{1}{2}$ ed alla ragione 4 $\frac{1}{4}$, non trovandosi nè l'uno nè l'altro dei due numeri nella tavola, si procederà nel seguente modo: si troverà come qui sopra la rendita al 4 % corrispondente all'età 45 $\frac{1}{2}$, e si avrà l'aumento $x = 0,225$, e la rendita 7,455; questo numero dovrà

essere accresciuto alquanto per l' aumento $\frac{1}{4}$ sulla ragione, e supponendo che per una stessa età gli aumenti delle rendite sieno proporzionali a quelli delle ragioni, si dirà, 1 *di aumento sulla ragione sta ad* $\frac{1}{4}$ *di aumento, come l' aumento* 0,67 *della rendita, da* 7,23 *a* 7,90, *sta al quarto termine* $y = 0{,}67 \times \frac{1}{4} = 0{,}167$, che indicherà l'aumento da applicarsi alla rendita 7,455 per farla corrispondere alla ragione $4\frac{1}{4}$; la rendita vitalizia corrispondente all' età $45\frac{1}{2}$ ed alla ragione $4\frac{1}{4}$ sul capitale 100 sarà dunque 7,622. Sul capitale 2450 la rendita vitalizia sarebbe

$$2450 \times 0{,}07622 = 186{,}74.$$

Aggiungiamo il calcolo di alcuni altri esempi per chiarir meglio queste idee.

Calcolo della rendita vitalizia sul capitale 100.

per l'età 69 e la ragione $4\frac{1}{2}$

$2 : 1 :: 17{,}57 - 15{,}90 : x$

$x = \frac{1{,}67 \times 1}{2} = 0{,}835$

$1 : \frac{1}{2} :: 16{,}52 - 15{,}90 : y$

$x = 0{,}835$

$y = 0{,}310$

Rendita dalla tavola . . = 15,90

Somma . . = 17,045

per l' età $75\frac{2}{5}$ e la ragione $5\frac{3}{4}$

$2 : 1^{2} :: 25{,}27 - 22{,}53 : x = 2{,}28$

$1 : \frac{3}{4} :: 23{,}17 - 22{,}53 : y = 0{,}48$

Rendita dalla tavola . . = 22,53

Somma . . = 25,29

464*. La stessa tavola precedente serve a risolvere il problema inverso cioè, *dovendo sciogliere, o come suol dirsi,* affrancare *un vitalizio, si vuol determinare il capitale da restituirsi in corrispondenza della rendita vitalizia che si paga, dell' età del godente e dell' interesse del denaro negli ordinari contratti di prestito.* Sia la rendita vitalizia di 72 franchi, l' età di colui che

ne gode 36 anni, e l'interesse del denaro al 6 per %. Cerchiamo nella tavola la rendita vitalizia corrisponde all'età di 36 anni ed all'interesse del 6 %, e troveremo 7,74; e siccome una tal rendita corrisponde al capitale 100, è chiaro che se l'annualità che si paga fosse appunto 7,74, per affrancare il vitalizio si dovrebbero sborsare 100 franchi; onde per trovare il capitale corrispondente alla rendita di 72 franchi si farà la proporzione $7,74 : 72 :: 100 : x$, da cui si desume $x = 930,23$, che è il capitale domandato. Se l'età e l'interesse non si trovassero immediatamente nella tavola, bisognerebbe prendere i quarti proporzionali nel modo indicato di sopra.

Regola di società.

465. La regola di *società* ha per oggetto di dividere il guadagno o la perdita di una società commerciale fra le persone che vi hanno preso parte e proporzionalmente ai loro diritti rispettivi.

ESEMPIO. *Tre negozianti hanno riunito i loro capitali in commercio; il primo ha posto* 2500 fr., *il secondo* 4200 *e il terzo* 3000 fr. *Dopo qualche tempo vogliono dividere fra loro il guadagno ottenuto, che fu di* 3895 fr.: *si domanda quanto spetta a ciascuno?*

È chiaro che tutto il problema è ridotto a dividere la somma 3895 in tre parti proporzionali rispettivamente a 2500, 4200, 3000; quindi, rappresentando con x, y, z queste tre parti, si ha immediatamente (347).

$$x = \frac{3895 \times 2500}{2500 + 4200 + 3000}, \quad y = \frac{3895 \times 4200}{2500 + 4200 + 3000},$$

$$z = \frac{3895 \times 3000}{2500 + 4200 + 3000}.$$

466. Spesso i negozianti che formano società di commercio non impiegano i loro capitali per lo stesso tempo, ed allora la distribuzione del guadagno deve farsi avendo riguardo a questa condizione particolare. Dimostriamo il seguente

TEOREMA. *Se più negozianti hanno posto in commercio dei capitali* c_1, c_2, c_3, c_4, *durante i tempi* t_1, t_2, t_3, t_4, *le loro parti nei guadagni saranno proporzionali ai prodotti* $c_1 \times t_1$, $c_2 \times t_2$, $c_3 \times t_3$, $c_4 \times t_4$.

Osserviamo che il frutto del capitale c_1, impiegato pel tempo t_1, è uguale al frutto del capitale $c_1 \times t_1$ impiegato per 1 anno; similmente i capitali c_2, c_3, c_4 impiegati pei tempi t_2, t_3, t_4 produrranno gli stessi frutti che i capitali $c_2 \times t_2$, $c_3 \times t_3$, $c_4 \times t_4$ impiegati per 1 anno. Dunque ai capitali proposti impiegati per diversi tempi si potranno sostituire gli altri $c_1 \times t_1$, $c_2 \times t_2$, $c_3 \times t_3$, $c_4 \times t_4$ impiegati per lo stesso tempo. Ciò che bisognava dimostrare.

ESEMPIO. *Tre associati hanno fatto un guadagno di* 12352 fr.: *il primo aveva posto in società* 10000 fr. *per* 3 *anni, il secondo* 15000 *per* 4 *anni, e il terzo* 8000 fr. *per* 2 *anni: quale dev' essere la parte di ciascuno?*

In virtù del teorema precedente si tratta di dividere 12352 in tre parti rispettivamente proporzionali a 10000×3, 15000×4 e 8000×2, cioè a 30000, 60000, 16000, o ciò ch'è lo stesso, a 30, 60, 16, si avrà dunque, indicando con x, y, z le parti,

$$x = \frac{12352 \times 30}{106} = 3495{,}84\ldots, \quad y = \frac{12352 \times 60}{106} = 6991{,}68\ldots,$$

$$z = \frac{12352 \times 16}{106} = 1864{,}45\ldots$$

Regola congiunta.

467*. La regola congiunta ha per oggetto di trovare il rapporto di due quantità le quali non sono paragonate immediatamente fra loro, ma hanno relazioni conosciute con altre quantità intermedie, dimodochè il rapporto cercato risulta dalla composizione di più rapporti dati. Essa si applica principalmente al cambio delle monete, per cui si chiama ancora regola di cambio.

Esempio. Si sa che 20 *lire* toscane equivalgono a 17 *franchi*, che 63 franchi equivalgono a 50 *scellini* inglesi, 130 scellini a 63 *fiorini* austriaci, e 27 fiorini a 260 *reali di veglione* di Spagna; si domanda 45 reali a quante lire toscane corrisponderanno?

È chiaro che i rapporti contenuti in questo esempio, si possono rappresentare così:

1 *lira*	:	1 *franco*	::	17	:	20
1 *franco*	:	1 *scellino*	::	50	:	63
1 *scellino*	:	1 *fiorino*	::	63	:	130
1 *fiorino*	:	1 *reale*	::	260	:	27
1 *reale*	:	1 *lira*	::	x	:	45.

x rappresenta il numero di lire corrispondenti a 45 reali.

Moltiplicando queste proporzioni termine a termine, si ottiene l'altra proporzione,

$$1^{l}\times1^{fr}\times1^{sc}\times1^{flo}\times1^{re}\times : 1^{fr}\times1^{sc}\times1^{flo}\times1^{re}\times1^{l}$$
$$:: 17\times50\times63\times260\times x : 20\times63\times130\times27\times45,$$

e poichè i due primi termini sono eguali fra loro, i due ultimi saranno pure eguali fra loro, e si avrà

$$17\times50\times63\times260\times x = 20\times63\times130\times27\times45;$$

da cui

$$x = \frac{20 \times 63 \times 130 \times 27 \times 45}{17 \times 50 \times 63 \times 260} = \frac{20 \times 130 \times 27 \times 45}{17 \times 50 \times 260} = 14 \frac{5}{17}.$$

Quindi 45 *reali* equivalgono a lire fiorentine $14 \frac{5}{17}$.

Da questo procedimento si desume una regola pratica semplicissima che può applicarsi a tutti i problemi dello stesso genere. Scriviamo i rapporti di equivalenza enunciati nel problema come segue:

20 *lire* = 17 *franchi*
63 *franchi* = 50 *scellini*
130 *scellini* = 63 *fiorini*
27 *fiorini* = 260 *reali*
45 *reali* = x *lire*,

eguagliamo il prodotto di tutti i termini della prima colonna al prodotto di tutti i termini della seconda, omettendo le denominazioni, ed avremo l'eguaglianza trovata di sopra

$$20 \times 63 \times 130 \times 27 \times 45 = 17 \times 50 \times 63 \times 260 \times x.$$

Quindi si ha la regola: *Scrivete i dati rapporti di equivalenza uno sotto l'altro in modo che il secondo termine di ciascun rapporto sia della stessa specie di unità del primo termine del rapporto seguente, e continuate così sino all'ultimo rapporto di cui il secondo termine dovrà rappresentare la quantità incognita, ed essere della stessa specie di unità del termine iniziale; dopo di ciò dividete il prodotto di tutti i primi termini per quello di tutti i secondi termini esclusa la quantità che si cerca, ed il quoziente esprimerà il valore di quest'ultima quantità.*

Facciamo un'altra applicazione di questa regola.

Si domanda il *rublo* d'argento di Russia che parte è del *ducato* napolitano, sapendosi che 86 ducati equivalgono a 425 *lire austriache*, 42 lire austriache a 43 *lire toscane*, 134 lire toscane a 21 *scudi romani*, e 50 scudi romani a 67 *rubli* di Russia? Si scriveranno i rapporti come segue.

86 ducati = 425 lir. aust.
42 lir. aust. = 43 lir. tosc.
134 lir. tosc. = 21 scudi rom.
50 scudi rom. = 67 rubli di Russia
1 rublo = x ducati

dai quali si dedurrà immediatamente,

$$x=\frac{86\times42\times134\times50}{425\times43\times21\times67}=\frac{2.43\times2.21\times2.67\times2.25}{17.25\times43\times21\times67}$$
$$=\frac{2\times2\times2\times2}{17}=\frac{16}{17}=0{,}9412 \text{ duc}$$

Un rublo vale dunque grana 94 $\frac{12}{100}$

Regola di alligazione.

468. Problema I. *Si sono mescolati* 80 *litri di vino a* $0^f,75$ *il litro con* 25 *litri di vino a* $0^f,60$. *Qual è il prezzo di un litro della mescolanza?*

È chiaro che

80 *litri* a $0^f,75$ *il litro costano* $80\times0{,}75 = 60^{fr}$
25 . . . a 0,60 . . . . $25\times0{,}60 = 15$
dunque 105 *litri di vino costano* in tutto . . . . 75 fr.

Quindi dividendo il prezzo totale del vino pel numero totale dei litri, si avrà il prezzo *medio* di un litro.

ossia il costo di un litro della mescolanza, che sarà franchi 0,71.

469. Problema II. *In qual proporzione bisogna mescolare del vino a* $0^f,80$ *il litro con vino a* $0^f,50$ *per ottenere* 100 *litri di vino a* $0^f,62$?

Sopra ogni litro di vino a 0,50 venduto 0,62 si guadagna 0,12.

Sopra ogni litro a 0,80 venduto 0,62 si perde 0,18.

Dunque, affinchè non vi sia nè perdita nè guadagno, bisogna che, chiamando x e y le quantità di vino di ciascuna qualità, si abbia:

$$x \times 0{,}12 = y \times 0{,}18, \text{ ovvero } \frac{x}{18} = \frac{y}{12};$$

e poichè si ha pure

$$x + y = 100,$$

il problema si risolverà col metodo esposto nel n° 347.

470. Il prezzo del miscuglio, o *lega,* di più metalli fusi insieme si ottiene nello stesso modo; anzi la *regola di alligazione* ha preso in origine il suo nome dalla *lega* dei metalli.

L'oro e l'argento non si trovano mai puri in commercio, ma sempre mescolati con una piccola quantità di metallo più vile, come il rame, ed il rapporto fra il peso della parte di metallo fino contenuto nel miscuglio, ed il peso totale di questo, si chiama *titolo;* così una verga di metallo fino combinato con rame per $\frac{1}{10}$ del peso totale, si dice al *titolo* di $\frac{9}{10}$, e se la porzione di rame è di $\frac{2}{1000}$ soltanto, la verga è al titolo di $\frac{998}{1000}$, ec. Il *titolo* delle monete d'oro e d'argento ha lo stesso significato.

471. Problema I. *Si hanno due verghe d'argento, la prima al titolo di* 0,950, *la seconda al titolo di* 0,885, *qual quantità di ciascuna di esse bisogna prendere per avere un chilogrammo di argento al titolo di* 0,900?

Ogni grammo al titolo di 0,885 porta nella lega 0,015 d' argento di meno di quello che vi bisognerebbe perchè il titolo fosse 0,900; al contrario, ogni grammo a 0,950 porta 0,050 di argento al disopra della proporzione richiesta. Se dunque si chiamano x e y le quantità rispettive delle due verghe, vi sarà compenso se

$$x \times 0{,}015 = y \times 0{,}050, \text{ ovvero } \frac{x}{50} = \frac{y}{15};$$

e poichè

$$x + y = 1^{ch},$$

tutta la questione è ridotta a dividere un chilogrammo in due parti proporzionali a 50 e 15: si ha dunque (347)

$$x = \frac{1^{ch} \times 50}{65} = 0^{ch},7692...., \quad y = \frac{1^{ch} \times 15}{65} = 0^{ch},2307....$$

472. Problema II. *Si è ritirata dal commercio una quantità di monete vecchie per coniarne delle nuove; ed a tale oggetto si sono fusi insieme* 23 *chilogrammi di monete di argento al titolo di* 0,825, 14 *chilogrammi di monete dello stesso metallo al titolo di* 0,910, *e chilogrammi* 19 *al titolo di* 0,845: *si domanda il titolo della lega.*

È chiaro che

23^{ch} a 0,825	*contengono di metallo fino*	ch.	$23 \times 0{,}825 = 18{,}975$
14^{ch} a 0,910	»	»	$14 \times 0{,}910 = 12{,}740$
19^{ch} a 0,845	»	»	$19 \times 0{,}845 = 16{,}055$
56^{ch} *di mescolanza contengono di metallo fino*		. . . . .	47,770

e siccome il titolo non è che il rapporto del peso della

quantità di metallo fino al peso totale, il titolo della *lega* sarà $\frac{47,77}{56} = 0,853$.

Esercizi.

I. In Francia vi sono 5586786^{ettari},53 di terra che producono frumento. Il prodotto annuale medio è di 69530062 ettolitri, e rappresenta un valore di 1102768037 franchi. Calcolare la produzione media di una proprietà di 2^{ett},17, situata in Francia, e il suo prezzo, supponendo che frutti il 3 %.

II. Il suolo della Francia contiene per abitante 1^{ett},57, che si può decomporre nel modo seguente:

Produzione di alimenti e di vestiario.	0,89
Boschi.	0,40
Terre incolte.	0,23
Costruzioni, strade, canali.	0,04
Fiumi, ruscelli, laghi.	0,01
	1,57

La superficie totale della Francia essendo 49863692 ettari, si domanda il numero di ettari di terre incolte.

III. La Francia consuma annualmente 67400 quintali metrici di rame. Di questa quantità, solo 1000 quintali sono prodotti in Francia; le altre nazioni danno il resto, cioè:

Inghilterra.	43900
Russia.	8800
Turchia.	4400
Spagna.	400
America.	8900
	66400

Formare una tavola che indichi, per un quintale di rame consumato in Francia, quanto se ne domanda a ciascuna delle nazioni menzionate di sopra.

IV. Il capitale impiegato in una fabbrica è di 700000 fr., di cui una metà rappresenta il *capitale fisso* (macchine e fabbriche), e l'altro è il *capitale mobile*. Questa fabbrica produce annualmente 8575 tonnellate di ferro fuso, che si vendono al prezzo di 125 franchi la tonnellata. Il costo di 100 chilogrammi di ferro fuso si distribuisce nel modo seguente:

Minerale. . 300^{ch} a 1^{f} i 100^{ch}.	3^{f}
Coke. . . . 200^{ch} a 2^{f} i 100^{ch}.	4
Salario degli operai.	0,30
Spese generali e di mantenimento. .	1,40
	8,70

Si calcola inoltre 10 per 100 d'interessi per il capitale fisso della fabbrica, e 7 per cento per il capitale mobile; qual è il guadagno annuale? Diminuire di una stessa quantità la tassa dell'interesse del capitale mobile e quello del capitale fisso, in modo da potere aumentare di 10 per 100 il salario degli operai senza cambiare questo guadagno.

V. Una fabbrica riduce in ferro 10000 tonnellate di ferraccio per produrre 100 chilogrammi di ferro: si spendono:

Ferraccio. . . . . 132^{ch} a 12,5	16,15
Carbon fossile. . 300^{ch} a 1,20.	3,60
Salario degli operai.	2,00
Spese generali e di mantenimento. . .	1,20
Costo di 100 *chilogrammi di ferro*. fr.	22,95

Il capitale mobile essendo di 350000 franchi, determinare a qual prezzo un capitalista deve pagare questa fabbrica perchè il suo danaro gli frutti il 15 per 100. Si supporrà che l'interesse del capitale mobile sia calcolato a 6 per 100 e che il ferro fabbricato si venda 257 franchi la tonnellata.

VI. I dazi diretti sono distribuiti tra gli 86 dipartimenti. Il consiglio generale di ogni dipartimento distribuisce tra i diversi circondari la somma di cui ogni dipartimento è imposto: il consiglio di circondario divide a sua volta questa

somma tra i comuni, e finalmente, in ciascun comune il dazio è distribuito tra gli individui. Supponendo queste repartizioni proporzionali, la prima alle rendite dei dipartimenti, la seconda alle rendite dei circondari, la terza alle rendite dei comuni, e finalmente, in uno stesso comune, alla rendita degli individui, provare che due individui che appartengono a diversi dipartimenti, sono imposti proporzionalmente alla loro rendita.

VII. La sabbia aurifera che si ricava dalle rive del Reno ha una ricchezza media di 0,000000232 (rapporto del peso dell'oro al peso totale). Il valore totale dell'oro che si trae annualmente da questa sabbia è 45000 fr. Qual è il peso totale della sabbia sottoposta alla lavatura, supponendo la perdita dovuta all'operazione di 0,09 (9 per 100)?

VIII. Le sabbie aurifere della Siberia contengono in media $\frac{3}{2}$ zolotniks di oro sopra 4000 libbre russe di sabbia. Sapendo che la libbra russa contiene 96 zolotniks, è necessario sapere che essa corrisponde a $0^{ch},4095$ per calcolare la quantità d'oro contenuta in 1000 chilogrammi di questa sabbia?

IX. Le spese necessarie per estrarre il rame da un quintale di minerale si elevano a $5^{f},75$; si compra una certa quantità di minerale che contiene 12 per 100 di rame, al prezzo di 18 franchi il quintale; il rame perduto nell'operazione elevandosi ai due centesimi di quello che contiene il minerale, quale sarà il prezzo del quintale di rame?

X. Il numero dei posti presi nei vagoni di prima classe di una strada ferrata è stato, nel primo semestre, $\frac{8}{67}$ del numero totale dei posti. Questo rapporto si è elevato, durante il secondo semestre, a $\frac{1}{7}$, ed è per l'intero anno $\frac{3}{22}$. Dedurre da questi dati il rapporto del numero dei viaggiatori del primo semestre al numero di quelli del secondo semestre, e calcolare questi due numeri, supponendo che nel secondo semestre vi sieno stati 200000 viaggiatori di più.

XI. Un appaltatore dichiara di fornire zavorra in fran-

tumi di pietra per una lunghezza di via ferrata di 17 chilometri, alla ragione di fr. 3,90 il metro cubo.

La pietra viene a costare nelle petriere 1 fr. il metro cubo. Mediante la rottura, il suo volume è ridotto di $\frac{1}{10}$. Per la rottura si paga fr. 1,25 per metro cubo di pietra rotta; e per il trasporto alla strada di ferro, compresovi caricamento e scaricamento, fr. 0,80 per metro cubo di pietra rotta e per chilometro.

Si domanda a qual distanza media dalla strada ferrata debbono trovarsi le petriere, affinchè l'appaltatore faccia un guadagno di $\frac{1}{10}$ sul prezzo stabilito.

XII. Alla strada ferrata da Parigi a Lione le rotaie pesano 38 chilogrammi per metro corrente. La lunghezza di ciascuna spranga di rotaia è di 5 metri. Il prezzo delle rotaie per 100 chilogrammi è 37 fr. La lunghezza da Parigi a Tonnerre è di 198 chilometri, e la carreggiata è doppia in questo intervallo, cioè formata da due binarii o da 4 rotaie.

Si domanda il peso totale delle rotaie impiegate per formare la carreggiata tra Tonnerre e Parigi; il cubo del ferro, la sua densità essendo di 7,70; il numero delle spranghe; il prezzo totale dei due binarii.

XIII. Un operaio può trasportare ogni giorno in una carretta 800 chilogrammi a un chilometro. Il prezzo della giornata è di fr. 2,25. Si domanda quanto costeranno 500 metri cubi di terra trasportati a 97 metri, sapendo che il metro cubo di terra pesa 1600 chilogrammi.

XIV. Un cavallo può trascinare, mediante un carro, 1200 chilogrammi: la sua velocità è di ch. 4,25 all'ora: il tempo richiesto per caricare e scaricare è di 10 minuti: il prezzo del carro col suo conduttore è di 5 fr. per giorno, e la durata del lavoro è di 10 ore.

Si domanda quanto costeranno 500 metri cubi trasportati a 97 metri di distanza, il metro cubo pesando 1600 chilogrammi.

CAPITOLO XX.°

TEORIA DELLE APPROSSIMAZIONI DECIMALI.

Oggetto della teoria delle approssimazioni.

473. Le regole del calcolo dei numeri interi e decimali, esposte precedentemente, danno il mezzo di trovare il risultato *esatto* di una operazione qualunque da eseguire sopra questi numeri. Ma spesso non si ha bisogno di conoscere che un valore approssimato del risultato; e allora fa d'uopo usare metodi più speditivi, che ci proponiamo esporre in questo capitolo.

Questi metodi abbreviativi, utilissimi pel calcolo dei numeri interi o decimali dati esattamente, sono necessari per ottenere il risultato di una operazione da eseguire sopra numeri incommensurabili di cui non si possono avere che valori approssimati, o sopra numeri che risultano da esperienze e da osservazioni sempre necessariamente affette da errori.

474. Un numero incommensurabile essendo il limite dei suoi valori approssimati a meno di 0,1, di 0,01, di 0,001, ec., può essere considerato come un numero decimale di un numero illimitato di cifre. Quindi le regole che faremo conoscere si applicheranno a tutti i casi, e ci daranno la soluzione delle due questioni seguenti che costituiscono tutta la teoria delle approssimazioni.

1° *Con quale approssimazione si può ottenere il risultato di una operazione da eseguire sopra numeri di cui non si conoscono che valori approssimati?*

2°. *Essendo dati molti numeri capaci di essere valutati a meno di una unità di un ordine qualunque, con quale approssimazione bisogna calcolare ciascuno di essi, per ottenere, a meno di una unità di un dato ordine, il risultato di una operazione da effettuare sopra questi numeri?*

Ma prima di procedere oltre, è indispensabile premettere talune considerazioni di molta importanza.

475. Essendo dato un numero decimale N formato da un numero di cifre limitato o illimitato, se si sopprimono tutte le cifre decimali che seguono la n^{esima}, il numero decimale A che si ottiene sarà il valore di N a meno di $\frac{1}{10^n}$ per difetto; e si ottiene il valore B di N a meno di $\frac{1}{10^n}$ per eccesso, aumentando di una unità l'ultima cifra di A. Uno dei numeri A e B è un valore approssimato di N a meno di una mezza unità dell'ordine n^{esimo} decimale; sarà A se la $(n+1)^{esima}$ cifra decimale di N è 4 o una cifra minore; sarà, al contrario, B se la $(n+1)^{esima}$ cifra di N è 5 o una cifra maggiore. Quello fra i numeri A e B che differisce da N per meno di una mezza unità dell'ordine n^{esimo} decimale chiamasi abitualmente il valore di N con n decimali. Così, per esempio, quando si parla di numeri calcolati con sette decimali, bisogna intendere che questi numeri hanno un errore minore di una mezza unità del settimo ordine decimale. Quindi, per calcolare un numero con sette decimali, è indispensabile sapere se l'ottava cifra decimale è superiore o inferiore a 4, ciò che richiede che si calcoli il numero di cui è parola, a meno di $\frac{1}{10^8}$, e qualche volta con un'approssimazione maggiore.

476. L'errore da cui è affetto un numero approssi-

mato, si dice *l'errore assoluto* di questo numero; quindi l'errore assoluto è uguale alla differenza che passa tra il numero approssimato e il numero esatto.

Si chiama *errore relativo* di un numero approssimato, il quoziente della divisione dell'errore assoluto pel numero esatto. Quindi l'errore assoluto è uguale al prodotto dell'errore relativo pel numero esatto.

Il grado di approssimazione di un calcolo è definito con precisione non dall'errore assoluto, ma dall'errore relativo. Infatti, non basta sapere, per esempio, che nella misura di una lunghezza si è commesso un errore minore di 1 centimetro, per conchiudere che la misura è ben presa; giacchè questo errore, trascurabile sopra una lunghezza di 10 metri, è notabilissimo sopra una lunghezza di 1 decimetro.

È utile conoscere quale relazione vi ha tra l'errore relativo di un risultato numerico e il numero di cifre esatte che gli corrisponde. Questa relazione risulta dai due seguenti teoremi:

477. Teorema I. *Se un numero è calcolato con* m *cifre esatte, cominciando dalla cifra significativa* k *delle più alte unità, l'errore relativo sarà minore della frazione* $\frac{1}{k.10^{m-1}}$.

Sieno a il numero di cui si tratta, α l'errore assoluto, in guisa che $a-\alpha$ sia un valore approssimato con m cifre esatte; sia u l'unità dell'ordine della cifra m^{esima} cominciando dalla sinistra; si ha evidentemente

$$\alpha < 1.u \quad \text{e} \quad a > k.10^{m-1}.u.$$

il segno $>$ non escludendo l'eguaglianza; avremo

$$\frac{\alpha}{a} < \frac{1}{k.10^{m-1}}:$$

ciò che volevasi dimostrare.

Esempio. Consideriamo il numero esatto 5467, 342376, nel quale conserveremo le sei prime cifre a sinistra, ed otterremo il numero approssimato 5467,34. Qui $\alpha < 0{,}01$, quindi l'errore relativo è $< \frac{1}{5 \cdot 10^{6-1}}$, ovvero $< \frac{1}{500000}$.

Osservazione I. Tutte le volte che la cifra k non sarà conosciuta immediatamente si potrà fare uso di un altro limite. Infatti è chiaro che se l'errore relativo è minore di $\frac{1}{k \cdot 10^{m-1}}$, a più forte ragione sarà minore di $\frac{1}{10^{m-1}}$.

Osservazione II. Noi abbiamo supposto che le m prime cifre di a fossero conosciute esattamente; ma il teorema non esige precisamente questa condizione. Infatti l'ineguaglianza $\alpha < 1 \cdot u$ esprime solamente che l'errore assoluto è minore di una unità dell'ordine della m^{esima} cifra. Or ciò può accadere, anche quando la m^{esima} cifra del valore approssimativo fosse erronea di una unità. Così, supponiamo che si prenda il numero 3,158 per valore approssimato della radice quadrata di 10; poichè

$$\sqrt{10} = 3{,}16227\ldots,$$

l'errore assoluto 0,00427...., sarà minore di 0,01, cioè minore di una unità dell'ordine della terza cifra del numero 3,158; quindi l'errore relativo sarà minore di $\frac{1}{3 \cdot 10^{2}}$.

478. Osservazione III. *La reciproca del teorema precedente non è vera.*

Se l'errore relativo di un numero è minore di

$\frac{1}{k\,.\,10^{m-1}}$, non ne segue che le m prime cifre del valore approssimato di questo numero sieno esatte, e neppure che l'errore assoluto sia minore di una unità dell'ordine della cifra m^{esima}.

Infatti, poichè si ha in generale

$$a > k\,.\,10^{m-1},$$

è chiaro che dall'ineguaglianza

$$\frac{\alpha}{a} < \frac{1}{k\,.\,10^{m-1}}$$

non si può conchiudere $\alpha < 1$.

Per esempio, sia $a = 398{,}2345$. Se si prende per valore approssimato 397, si commetterà un errore $\alpha = 1{,}2345\ldots.$ maggiore di 1; mentre l'errore relativo $\frac{1{,}2345\ldots.}{398{,}2345\ldots.}$ è evidentemente minore di $\frac{1}{3\,.\,10^{2}}$.

La reciproca dev'essere enunciata nel seguente modo:

479. Teorema II. *Se l'errore relativo di un numero di cui la prima cifra è* k, *è minore di* $\frac{1}{(k+1)10^{m-1}}$, *le* m *prime cifre del valore approssimato di questo numero saranno esatte; o, almeno, l'errore assoluto sarà minore di una unità dell'ordine della* m^{esima} *cifra.*

Infatti, per ipotesi

$$\frac{\alpha}{a} < \frac{1}{(k+1)\,10^{m-1}},$$

ma si ha evidentemente

$$a < (k+1)\,10^{m-1},$$

dunque

$$\alpha < 1$$

OSSERVAZIONE I. Siccome k è al più eguale a 9, si potrà sostituire al limite $\frac{1}{(k+1)\,10^{m-1}}$ il limite più semplice $\frac{1}{10^m}$; il teorema precedente si verificherà sempre.

480. OSSERVAZIONE II. Supponiamo, come innanzi, $a = 398{,}2345\ldots$ e prendiamo per valore approssimato $397{,}41$; l'errore relativo sarà minore di $\frac{1}{4\,.\,10^2}$; quindi $m = 3$, e si vede che la *terza* cifra 7 non è esatta, ma in virtù del teorema precedente potrà dirsi che l'errore assoluto del numero 397,41 è minore di una unità. Se questo numero si volesse ridurre alle sue tre prime cifre (come si fa ordinariamente), non si dovrebbe prendere 397, poichè l'errore definitivo supererebbe l'unità. Si commetterebbero due errori successivi, il primo proveniente dall'essere già 397,41 un valore approssimato, il secondo proveniente dalla soppressione delle cifre che seguono quella delle unità. Ciascuno di questi errori è minore di 1; ma la loro somma è maggiore di 1.

Tuttavia vi ha un mezzo semplice e generale per ridurre un numero alle sue m prime cifre commettendo un errore minore di una unità dell'ordine della m^{esima} cifra; ed è di aggiungere 1 all'ultima cifra conservata. Così, nell'esempio precedente, se prendiamo 398, i due errori invece di sommarsi si sottraggono l'uno dall'altro; e poichè ciascuno è minore di 1, la loro differenza è a più forte ragione minore di 1.

Da ciò che precede si deduce la regola seguente:

Se l'errore relativo di un numero approssimato per difetto è minore di $\frac{1}{10^m}$ *(o ancora, se è minore di* $\frac{1}{(k+1)10^{m-1}}$, k *indicando la cifra delle più alte unità),*

conservate le sole m *prime cifre del numero di cui si tratta, avendo cura di aumentare di* **1** *l'ultima delle cifre conservate, e il resultato sarà approssimato a meno di una unità dell'ordine di questa ultima cifra.*

Addizione.

481. Sieno a, b, c, ... più numeri di cui si hanno valori approssimati per difetto $a-\alpha$, $b-\beta$, $c-\gamma$, ec. L'errore assoluto della somma sarà

$$a+b+c+\ldots.-(a-\alpha+b-\beta+c-\gamma+\ldots.)$$

o

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots.,$$

cioè la somma degli errori parziali dei termini a, b, c, ec., e il resultato sarà approssimato per difetto. Se gli errori parziali α, β, γ, ec., non fossero tutti nello stesso senso, il valore assoluto dell'errore finale sarebbe evidentemente minore della somma $\alpha+\beta+\gamma+\ldots.$; ma siccome ordinariamente non si conoscono i valori stessi degli errori α, β, γ, ec., ma solamente dei limiti dei quali i medesimi sono minori, non si potrebbe più decidere qual è il senso dell'errore finale.

Per non complicare le notazioni, possiamo convenire che α, β, γ, ec., indichino i limiti rispettivi degli errori commessi sopra a, b, c, ec., e allora diremo che l'errore assoluto commesso sulla somma $a+b+c+\ldots$, è, *in tutti i casi*, minore di $\alpha+\beta+\gamma+\ldots.$, e l'errore relativo sarà minore di

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma+\ldots.}{a+b+c+\ldots.}.$$

Ora chiamiamo m il valore della più grande delle

frazioni $\frac{\alpha}{a}$, $\frac{\beta}{b}$, $\frac{\gamma}{c}$, ... avremo

$$\frac{\alpha}{a} < m, \quad \frac{\beta}{b} < m, \quad \frac{\gamma}{c} < m ....,$$

(il segno $<$ non escludendo l'eguaglianza), e quindi

$$\alpha < am, \quad \beta < bm, \quad \gamma < cm ....,$$

ossia

$$\alpha + \beta + \gamma + ... < (a + b + c + ...)m,$$

e

$$\frac{\alpha + \beta + \gamma + ...}{a + b + c + ...} < m.$$

Dunque, *l'errore relativo di una somma è minore del maggiore degli errori relativi dei termini che la compongono.*

Questo limite è semplice, ma ha l'inconveniente di essere troppo grande, e per conseguenza di non dare una idea esatta del grado di approssimazione ottenuto. Così, supponiamo che si tratti di sommare i numeri 2,34 e 0,07, ambedue approssimati a meno di una unità dell'ultimo ordine, cioè a meno di 0,01. L'errore assoluto della somma 2,41 sarà minore di 0,02, e l'errore relativo sarà minore di $\frac{2}{241}$, ovvero di $\frac{1}{100}$, mentre che il limite dato dall'errore relativo del termine 0,07 sarebbe $\frac{1}{7}$.

Poichè nell'addizione gli errori parziali α, β, γ, ec. si sommano, conviene che sieno tutti presso a poco eguali tra loro, cioè che i numeri a, b, c, ec., sieno tutti approssimati a meno di una unità decimale dello stesso ordine. Per esempio, se i numeri da sommare fossero $a = 47{,}8$ a meno di 0,1, $b = \sqrt{3}$, $c = \sqrt{48}$, non sarebbe utile calcolare i valori di queste due radici qua-

drate con una grande approssimazione, per esempio a meno di 0,0001; infatti, se prendessimo

$$\sqrt{3} = 1,7320, \quad \sqrt{45} = 6,7082,$$

la somma così calcolata sarebbe 56,2402, con un errore minore di 0,1002; per conseguenza non si potrebbe contare sulla cifra dei decimi, ma solamente su quella delle unità; risultato eguale a quello che avremmo trovato contentandoci di calcolare ciascuna radice con una sola cifra decimale.

482. Passiamo ora alla seconda questione delle approssimazioni numeriche: quale dovrà essere il grado di approssimazione di ciascun termine di una somma, affinchè questa somma sia conosciuta con m cifre esatte?

Affinchè la somma abbia m cifre esatte, l'errore relativo corrispondente dev'essere minore di $\frac{1}{10^m}$ (479); ma questo errore è inferiore al maggiore degli errori relativi dei termini della somma (481); dunque *basterà che ciascun termine sia valutato a meno di un errore relativo eguale a* $\frac{1}{10^m}$, *cioè con* $m+1$ *cifre, cominciando dalla cifra delle sue più alte unità.*

Ma, come abbiamo veduto innanzi, questo limite del numero delle cifre da calcolare per ciascun termine della somma potrà essere troppo elevato, soprattutto quando non saranno dello stesso ordine di grandezza. Quindi, in questo caso, invece di seguire la regola precedente che assoggetta i differenti termini ad *uno stesso errore relativo,* è preferibile di assoggettarle ad uno *stesso errore assoluto.*

Sia adunque α il limite ignoto che non deve superare questo errore, e indichiamo con s la somma cercata, e con p il numero dei suoi termini. L'errore re-

lativo della somma sarà minore di $\frac{p\alpha}{s}$, e si stabilirà l' ineguaglianza

$$\frac{p\alpha}{s} < \frac{1}{10^m}, \quad \text{da cui} \quad \alpha < \frac{s}{p \cdot 10^m}.$$

Nella valutazione di questo limite α, si potrà sostituire ad s un numero inferiore, approssimazione grossolana di s, che fornirà immediatamente l'addizione delle più alte unità dei numeri proposti.

Delle due regole che abbiamo date per valutare il grado di approssimazione di ciascun termine di una somma, il primo è il più facile ad applicare, e si seguirà tutte le volte che i numeri da sommare non differiranno molto gli uni dagli altri.

Esempi:

1°. *Debbasi calcolare la somma*

$$\sqrt{3} + \sqrt{45} + \sqrt{167}$$

con tre cifre esatte.

In questo esempio $m = 3$; seguendo la prima regola, si dovrà dunque calcolare ciascuna radice con quattro cifre esatte, e si trova

$$\sqrt{3} = 1{,}732\ldots., \quad \sqrt{45} = 6{,}708\ldots., \quad \sqrt{167} = 12{,}92\ldots.,$$

La somma 21,360 è approssimata a meno di una unità dell' ordine della sua terza cifra, cioè a meno di 0,1. Le sue due ultime cifre 6,0 possono essere erronee per molte unità; quindi non si conservano; ma nel sopprimerle si aumenta, secondo la regola (480), di una unità la terza cifra e si ha 21,4 per il valore richiesto della somma $\sqrt{3} + \sqrt{45} + \sqrt{167}$ ridotta a tre cifre. Essa è approssimata a meno di $\frac{1}{200}$ del suo valore (477).

Osserveremo che in conseguenza del Teorema II (479) $\sqrt{45}$ si sarebbe potuta calcolare con tre cifre invece di quattro, e scrivere $\sqrt{45}=6,70$, attesochè la prima cifra 6 di questa radice supera $k+1$ (k indicando la prima cifra della somma, cifra che si riconosce subito non poter superare 2).

2°. *Debbasi calcolare la somma*

$$\frac{2}{3}+\frac{2}{81}+\frac{2}{1215}+\frac{2}{15309}+\frac{2}{177147}+\frac{2}{1948617}$$
$$+\frac{2}{20726199}+\frac{2}{215233605}.$$

con sette cifre esatte.

I numeri da sommare essendo di grandezze differentissime fra loro, bisogna far uso della seconda regola. Sia α l'errore assoluto commesso sopra ciascuna frazione; avremo $\alpha<\frac{1}{8.10^8}$, e questa condizione sarà sodisfatta facendo $\alpha<\frac{1}{10^9}$.

Calcoleremo dunque ciascuna frazione con nove cifre decimali; avremo

$$\begin{aligned}
\tfrac{2}{3}&=0,666666666\\
\tfrac{2}{81}&=0,024691358\\
\tfrac{2}{1215}&=0,001646090\\
\tfrac{2}{15309}&=0,000130642\\
\tfrac{2}{177147}&=0,000011290\\
\tfrac{2}{1948617}&=0,000001026\\
\tfrac{2}{20726199}&=0,000000096\\
\tfrac{2}{215233605}&=0,000000009\\
\hline
\textit{Somma.}\ldots&=0,693147177+x;\ (x<\tfrac{1}{10^8}).
\end{aligned}$$

Ma questo numero bisogna ridurlo alle sue sette

prime cifre, la qual cosa si fa aumentando di una unità la settima cifra, e si avrà definitivamente

$$0{,}6931472,$$

per valore approssimato della somma proposta a meno di $\frac{1}{10^7}$.

Se in questo calcolo si fosse seguita la prima regola, che sottopone tutti i numeri allo stesso errore relativo, si avrebbe dovuto calcolare la frazione $\frac{2}{215233605}$ con *nove cifre cominciando dalla cifra significativa delle più alte unità,* cioè con diciassette cifre decimali, poichè le otto prime sono zeri.

Sottrazione.

483. Sieno a, b due numeri di cui si vuol calcolare approssimativamente la differenza $a-b$. Per avere un valore approssimato per difetto, prenderemo b per eccesso e a per difetto. Sieno $a-\alpha$, $b+\beta$ i valori approssimati di questi due numeri, l'errore assoluto della differenza sarà

$$a-b-[a-\alpha-(b+\beta)] \quad \text{o} \quad \alpha+\beta;$$

gli errori si sommano e l'errore finale è minore del doppio del maggiore dei due errori fatti sui numeri a e b.

Se i valori di a e b si fossero presi tutti e due per difetto, $a-\alpha$, $b-\beta$, l'errore della differenza sarebbe stato $\alpha-\beta$, e per conseguenza, minore del più grande dei due errori α e β; ma siccome non si hanno che limiti superiori di α, β e non i valori stessi di questi errori, s'ignorerebbe quale di essi predomina.

484. Se si volesse calcolare la differenza $a-b$ con m

cifre esatte, quale dovrà essere il numero delle cifre esatte da usare per ciascuno dei termini a e b?

Sia α il limite che non devono superare gli errori assoluti di a per difetto e di b per eccesso, dovrà aversi

$$\frac{2\alpha}{a-b}<\frac{1}{10^m} \quad \text{ossia} \quad \alpha<\frac{1}{2}\,\frac{a-b}{10^m}.$$

Quindi si calcolerà a per difetto b per eccesso, ciascuna a meno della frazione $\frac{1}{2}\cdot\frac{a-b}{10^m}$, o meglio, a meno dell' unità decimale immediatamente inferiore a questa frazione. (Poichè a e b non sono conosciuti esattamente, si sostituirà, in questa valutazione, ad a un numero inferiore e a b un numero superiore approssimati. L'ispezione della cifra delle più alte unità di a e di b fornirà immediatamente questi due numeri). Poi, effettuata la sottrazione, si conserveranno le sole m prime cifre, secondo la regola (480).

Ora è facile vedere ciò che bisognerebbe fare per calcolare approssimativamente una espressione della forma

$$a+b-c+d-e.$$

Per ottenere il resultato con m cifre esatte, si calcoleranno separatamente le somme $(a+b+d)$ e $(c+e)$, la prima per difetto la seconda per eccesso, ciascuna a meno dell' unità decimale immediatamente inferiore a $\frac{1}{2}\cdot\frac{a+b+d-(c+e)}{10^m}$. Poi l'operazione si compierà come nel caso precedente.

Moltiplicazione.

485. Teorema. *L'errore relativo di un prodotto approssimato per difetto è minore della somma degli errori relativi dei fattori di questo prodotto.*

Consideriamo prima il caso di due fattori a, b, i cui valori approssimati sono $a-\alpha$, $b-\beta$; il prodotto sarà approssimato per difetto e l'errore assoluto sarà

$$ab-(a-\alpha)(b-\beta) \quad \text{o} \quad a\beta+b\alpha-\alpha\beta,$$

quantità minore di $a\beta+b\alpha$. Quindi, l'errore assoluto del prodotto è minore della somma dei prodotti di ciascun fattore per l'errore commesso sull'altro.

Per conseguenza, l'errore relativo è minore di

$$\frac{a\beta+b\alpha}{ab} \quad \text{o} \quad \frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}.$$

Il teorema è dunque dimostrato per due fattori.

Proviamo ora che se è vero per un prodotto di p fattori $a, b, c, \ldots, l$, sarà ancora vero per un prodotto contenente un fattore m di più. Sieno $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda, \mu$ gli errori commessi su questi fattori, E l'errore relativo del prodotto dei p primi fattori; si ha per ipotesi, $E<\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}+\ldots+\frac{\lambda}{l}$. Ora il prodotto $abc\ldots lm$ si può considerare come composto di due fattori $abc\ldots l$ e m; dunque l'errore relativo di questo prodotto sarà minore di $\frac{\mu}{m}+E$, e a più forte ragione minore di $\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}+\ldots+\frac{\lambda}{l}+\frac{\mu}{m}$. Ciò posto, poichè la proposizione è stata stabilita per un prodotto di due fattori, sarà vera per tre fattori; essendo vera per tre, lo sarà per quattro, e così di seguito; dunque è una regola generale.

Lo stesso ragionamento applicato all'errore *assoluto* condurrebbe a questo teorema analogo: *L'errore assoluto di un prodotto di* m *fattori approssimati per difetto, è minore della somma dei prodotti che si ot-*

tengono moltiplicando l' errore commesso sopra ciascun fattore pel prodotto degli m—1 *altri fattori.* Poichè nella valutazione di questa somma ($\alpha . bc \ldots\ldots l + \beta . ac \ldots. l + \ldots.$), si tratta di avere solamente un limite, si sottintende che ad α, β, γ, ec., si sostituiranno i loro limiti superiori che sono i soli dati, e ad a, b, c, ec., numeri in eccesso.

Nella valutazione della somma $\left(\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}+\ldots.\right)$, che è il limite dell'errore relativo, si dovranno per la stessa ragione sostituire ad a, b, c, ec., numeri in difetto.

Se qualcuno dei fattori, come a, entrasse nel prodotto col suo valore esatto, si farebbe $\alpha = 0$, e le conclusioni precedenti sussisterebbero, con questa sola modificazione che, nel caso di *due fattori*, l' errore relativo del prodotto sarebbe precisamente *eguale* a quello del fattore il cui valore è approssimato.

486. Si può anche assegnare un limite inferiore dell'errore assoluto. E invero, nel caso di due fattori, l'errore assoluto è evidentemente maggiore di $(a-\alpha)\ \beta+(b-\beta)\alpha$. Estendendo questo limite a un numero qualunqne di fattori, si ha questo teorema generale: *L' errore assoluto di un prodotto di* m *fattori approssimati per difetto, è maggiore della somma dei prodotti che si ottengono moltiplicando l' errore commesso sopra ciascun fattore per il prodotto degli* m—1 *altri fattori presi coi loro valori per difetto.*

487. Se i fattori $a, b, c\ldots$ sono tutti eguali fra loro, l' errore assoluto di a^n sarà minore di $a^{n-1}.\alpha$, e l' errore relativo minore di $n\frac{\alpha}{a}$. Si ha quindi il teorema:

L' errore relativo di una potenza di un numero è minore del prodotto dell' errore relativo di questo numero per il grado della potenza.

L'errore assoluto di a^n è poi maggiore di $n\alpha(a-\alpha)^{n-1}$.

488. Proponiamoci di valutare, per esempio, l'errore del prodotto

$$1850,34 \times 3,4567$$

sapendo che ciascun fattore è approssimato per difetto a meno di una unità della sua ultima cifra. L'errore relativo del moltiplicando è minore di $\frac{1}{10^5}$, e quello del moltiplicatore è minore di $\frac{1}{3.10^4}$. L'errore relativo del prodotto sarà dunque minore di $\left(\frac{1}{10^5}+\frac{1}{3.10^4}\right)$, e a più forte ragione minore di $\frac{1}{10^4}$. Dunque (479) non si potrà contare che sulle quattro prime cifre del prodotto, e poichè la parte intera avrà precisamente quattro cifre, si conoscerà questo prodotto a meno di una unità.

La moltiplicazione fatta secondo il metodo ordinario, darebbe sei decimali, di cui neppure una è da conservare.

489. Passiamo alla seconda quistione delle approssimazioni decimali. Si tratta di sapere quante cifre bisogna impiegare in ciascuno dei fattori *a*, *b*, *c*, ec., perchè si possa contare sulle *m* prime cifre del prodotto.

Sia *p* il numero dei fattori. Basterà (479) che l'errore relativo del prodotto, preso con tutte le cifre fornite dalla moltiplicazione, sia minore di $\frac{1}{10^m}$ (o minore di $\frac{1}{(k+1)10^{m-1}}$, *k* essendo la cifra delle più alte unità del prodotto). E per questo, la somma degli errori relativi dei fattori dovrà essere al più eguale a questa stessa frazione.

L'errore relativo di ciascun fattore resta dunque

indeterminato, purchè la somma non superi questo limite. Il più semplice è di rendere ciascun errore inferiore alla p^{esima} parte di questo stesso limite; quindi si porrà

$$\frac{\alpha}{a}, \frac{\beta}{b}, \frac{\gamma}{c} \text{ ec. } < \frac{1}{p.10^m} \text{ ovvero } < \frac{1}{p(k+1)10^{m-1}}.$$

Così l'errore assoluto di ciascun fattore sarà proporzionale (presso a poco) a questo fattore; e, secondo la grandezza di p, sapremo quante cifre bisognerà impiegare per ciascun fattore. Infatti, se chiamiamo n il numero delle cifre esatte di un fattore e h la sua prima cifra, il suo errore relativo (477) sarà $< \frac{1}{h10^{n-1}}$, e quindi basterà prendere n in modo che si abbia $\frac{1}{h10^{n-1}} < \frac{1}{p\,.\,10^m}$, cioè, (supponendo che il segno $>$ non escluda l'eguaglianza) se $h > p$, oppure se $h > \frac{p(k+2)}{10}$, basterà che sia $n = m+1$; se $h > p(k+1)$, si potrà fare $n = m$; se $p < 10$ e $h < p$, si prenderà $n = m+2$: onde potremo enunciare la regola pratica seguente.

Basteranno m+1 *cifre per qualunque fattore la cui prima cifra sarà uguale o superiore a* p [o a $\frac{\mathrm{p(k+1)}}{10}$, se può farsi uso di k. Basterebbero anche m cifre per un fattore la cui prima cifra fosse eguale o superiore a $p(k+1)$].

Nel caso contrario, si adopereranno m+2 *cifre.*

Se si trattasse di due fattori a, b, di cui uno, b per esempio, sia preso col suo valore esatto, si deve fare $p = 1$, cioè a dire si deve soddisfare all'ineguaglianza $\frac{\alpha}{a} < \frac{1}{(k+1)10^{m-1}}$. In questo caso, basteranno sempre $m+1$ cifre per a.

490. L'esempio seguente mostrerà quali precauzioni bisogna prendere e quale ordine fa d'uopo seguire nelle operazioni.

Proponiamoci di calcolare con tre cifre esatte, o ciò ch'è lo stesso, a meno di 0,01 del suo valore, il prodotto

$$(\sqrt{3}+2)(\sqrt{45}-1)(\sqrt{8}+1).$$

Si ha $p=3$, $m=3$, e poichè la prima cifra di ciascun fattore è eguale o superiore a p, basteranno $m+1$ o 4 cifre per ciascuno: si prenderà dunque

$$\sqrt{3}+2=3{,}732,\sqrt{45}-1=5{,}708,\sqrt{8}+1=3{,}828;$$

e indicando con P il prodotto richiesto, la cui parte intera avrà evidentemente due cifre, si potrà porre

$$(1)\qquad P=3{,}732\times5{,}708\times3{,}828+\varepsilon,\quad \varepsilon<\frac{1}{10}.$$

Ciò posto, se le due moltiplicazioni successive si effettuassero nel modo ordinario, si troverebbero finalmente *nove cifre decimali, delle quali bisognerebbe conservare una sola.*

Per abbreviare questi calcoli, la prima quistione che si presenta è di sapere quante cifre è utile conservare nel primo prodotto parziale, quello di 3,372 per 5,708. Ora, se consideriamo il prodotto $P-\varepsilon$, o

$$(A)\qquad (3{,}732\times5{,}708)\times3{,}828,$$

astrazion fatta dai radicali proposti, abbiamo bisogno di conoscere il suo valore approssimato con tre cifre esatte, e di più, *bisognerà che riducendolo a queste cifre solamente, sappiamo se questo valore resta approssimato per difetto,* affine di potere compensare l'errore ε aumentando l'unità della terza cifra.

Bisognerà dunque operare come se si dovesse assicurare al prodotto (A) una cifra esatta di più, in tutto quattro cifre. Or questo prodotto si compone di *due fattori, di cui uno solamente* (3,732×5,708) *sarà preso approssimativamente.* Dunque basterà che quest' ultimo sia calcolato con $m+1$ o cinque cifre, e poichè esso avrà evidentemente due cifre nella sua parte intera, ci arresteremo alla cifra dei millesimi. Così si trova 21,302 per valore approssimato del numero (3,732×5,708), e resta a moltiplicarlo per 3,828; il prodotto (di cui scriviamo le sole quattro prime cifre) è 81,54 .... Si ha dunque

$$3{,}732\times5{,}708\times3{,}828=81{,}54\ldots.+\alpha,\quad \alpha<\frac{1}{100};$$

e, se riduciamo questo prodotto alle sue prime tre cifre, viene

$$3{,}732\times5{,}708\times3{,}828=81{,}5+\beta,\quad \beta<\frac{5}{100}+\frac{1}{100}<\frac{1}{10}.$$

Finalmente se questo valore si riporta nell' eguaglianza (1), si ha definitivamente

$$P=81{,}6\pm\omega,\quad \omega<\frac{1}{10}.$$

Dunque il valore del prodotto $(\sqrt{3}+2)(\sqrt{45}-1)(\sqrt{8}+1)$ a meno di $\frac{1}{100}$ del suo valore, è 81,6.

Moltiplicazione abbreviata.

491. Quando si vuole avere, con un'approssimazione data, il prodotto di due fattori conosciuti esattamente, e composti di un gran numero di cifre, l'operazione ordinaria può rendersi molto più semplice.

Proponiamoci di calcolare il prodotto

$$50{,}76948 \times 32{,}98375,$$

a meno di 0,001 del suo valore, cioè con quattro cifre esatte. Poichè la parte intera avrà evidentemente quattro cifre, ci arresteremo a quella della unità; ma è chiaro che per potere rispondere della cifra della unità del prodotto, bisognerà conoscere i decimi di ciascun prodotto parziale, a causa delle unità che questi decimi possono fornire. Quindi ciascun prodotto parziale sarà calcolato a meno di 0,1. Per quest'oggetto, si dà ordinariamente al calcolo la seguente disposizione:

```
        50,76948
      5738923
    ------------
       152307
        10152
         4563
          400
           15
          -------
prodotto = 1674,37
```

S'inverte l'ordine delle cifre del moltiplicatore, che diventa 5738923, e si scrive a questo modo, in guisa che *la cifra* 2 *delle sue unità* sia *posta sotto la cifra* 6 *dei centesimi* del moltiplicando (in generale, al disotto della cifra del moltiplicando che esprime unità *cento volte minori* dell'unità che indica l'approssimazione cercata). Da questa disposizione risulta che ciascuna cifra del moltiplicatore corrisponde a quella del moltiplicando, il cui prodotto per questa cifra dà centesimi. Ciò posto, si moltiplica il moltiplicando per ciascuna cifra del moltiplicatore, cominciando ciascuna moltiplicazione dalla cifra del moltiplicando che è al di

sopra della cifra del moltiplicatore. Così, per il primo prodotto parziale, si ha riguardo alla sola parte 50769, e si ottiene 152307 centesimi. Pel secondo prodotto parziale, si adopera la sola parte 5076 che moltiplicata per 2 dà 10152 centesimi. Ci fermiamo all' ultima cifra del moltiplicatore che ha la sua corrispondente superiore nel moltiplicando, cioè alla cifra 3, la quale dà per quinto e ultimo prodotto parziale 15 centesimi. Infine, sommando tutti questi prodotti si ottiene 1674,37.

Per apprezzare l' errore commesso, osserviamo che ciascun prodotto parziale è approssimato a meno di un numero di centesimi indicato dalla cifra che ha servito da moltiplicatore. Così, il prodotto parziale 152307 centesimi è approssimato a meno di 3 centesimi; giacchè la parte trascurata del moltiplicando è minore di una unità dell' ordine dell' ultima cifra impiegata 9; e questa unità, moltiplicata per la cifra 3 del moltiplicatore darebbe 3 centesimi. Quindi, l' errore commesso sulla somma dei cinque prodotti parziali è minore di

$$0,01\times(3+2+9+8+3)$$

ma questo non è ancora il limite dell' errore totale, perchè bisogna tener conto della parte 75 trascurata nel moltiplicatore. Or questa parte è minore di una unità dell' ordine dell' ultima cifra impiegata 3; e questa unità, moltiplicata per la cifra 5 del moltiplicando, darebbe un prodotto eguale a 5 centesimi con un errore minore di 1 centesimo. Dunque l' errore che risulta dal trascurare le cifre del moltiplicatore che non hanno corrispondente superiore nel moltiplicando, è minore di (5+1) centesimi.

Quindi l' errore totale del prodotto 1674,37 ha per limite.

$$0,01\times(3+2+9+8+3+5+1) \text{ ovvero } 0,31.$$

Ora, se questo prodotto si riduce alle sue quattro prime cifre, si commetterà un nuovo errore di 0,37 che, aggiunto al limite precedente, darà 0,68 <1. Dunque 1674 è il valore per difetto del prodotto cercato a meno di una unità.

Nel caso in cui l'errore proveniente dalla riduzione del prodotto alle sue prime quattro cifre, aggiunto al limite dell'errore precedentemente ottenuto, avesse dato una somma maggiore di 1, si sarebbe preso 1675, conformemente alla regola (480).

Osservazione. Se il moltiplicando non si fosse prolungato verso la destra, al di là della cifra 9 alla quale corrisponde l'ultima cifra a destra del moltiplicatore, in guisa che la parte 48 non fosse esistita, il primo prodotto parziale 152307 non sarebbe stato erroneo; e per conseguenza, nell'espressione già trovata del limite dell'errore, la cifra 3 che ha servito da moltiplicatore a questo prodotto parziale sarebbe scomparsa dalla somma $(3+2+9+8\ldots.)$, e il limite dell'errore si sarebbe ridotto a $0{,}01\times(2+9+\ldots.+5+1)$.

Se il moltiplicando si riducesse a 50,76, si completerebbe scrivendo un zero alla destra di 6, affinchè la cifra 3 del moltiplicatore avesse la sua corrispondente. Ma allora si vede che i due primi prodotti parziali cesserebbero di essere erronei, e per conseguenza i loro moltiplicatori 3 e 2 non comparirebbero più nel limite dell'errore che si ridurrebbe a $0{,}01\times(9+8+3+5+1)$; e così di seguito.

Nel modo stesso, se il moltiplicatore non si fosse prolungato verso la sinistra, al di là della cifra 3 alla quale corrisponde la prima cifra del moltiplicando, in guisa che non vi fosse la parte 75, si sarebbe dovuto sopprimere $(5+1)$ dalla somma precedente, ciò che avrebbe diminuito di altrettanti centesimi il limite dell'errore.

Da ciò che precede, si conchiude questa regola generale per apprezzare il grado di errore che comporta il metodo della moltiplicazione abbreviata:

Si fa la somma delle cifre del moltiplicatore rovesciato cominciando dalla prima cifra a destra, il cui corrispondente moltiplicando è seguito da una o più cifre significative, sino all'ultima di quelle che hanno un corrispondente moltiplicando; e, se il moltiplicatore si prolunga a sinistra del moltiplicando, si aggiunge a questa somma la prima cifra a sinistra del moltiplicando, aumentata di 1. — *Poi si moltiplica il tutto per l'unità inferiore di due ordini a quella che rappresenta l'approssimazione domandata. Il prodotto che ne risulta è un limite superiore dell'errore commesso.*

Finchè il numero dei prodotti parziali non supererà 10, la somma delle cifre del moltiplicatore e della prima cifra del moltiplicando, più 1, sarà al più eguale a $(9 \times 10+9+1)$ o 100. Per conseguenza, l'errore commesso sul prodotto totale sarà minore di una unità dell'ordine che segna l'approssimazione richiesta.

Se il numero dei prodotti parziali superasse 10, l'approssimazione potrebbe non essere più sufficiente. Bisognerebbe allora avanzare di un posto verso la destra il moltiplicatore, in guisa che ciascuna delle cifre di questo fattore venisse a trovarsi sotto quella del moltiplicando il cui prodotto per questa cifra dà unità inferiori *di tre ordini all'unità* che indica l'approssimazione richiesta. Si sottintende che se il moltiplicando non avesse abbastanza cifre verso la destra perchè le cifre del moltiplicatore possano essere poste secondo la regola precedente, si completerebbe il moltiplicando scrivendo dei zeri verso la sua destra.

Divisione.

492. Teorema. *L' errore relativo di un quoziente approssimato per difetto è minore della somma degli errori relativi dei suoi due termini.*

Sieno $a-\alpha$, $b+\beta$, i valori approssimati dei due termini del quoziente $\frac{a}{b}$. L' errore assoluto sarà

$$\frac{a}{b}-\frac{a-\alpha}{b+\beta}=\frac{a\beta+b\alpha}{b(b+\beta)},$$

quantità minore di $\frac{a\beta+b\alpha}{b^2}$; e dividendo per $\frac{a}{b}$, si vede che l' errore relativo sarà inferiore a

$$\frac{a\beta+b\alpha}{ab}=\frac{\beta}{b}+\frac{\alpha}{a}.$$

Questo limite è uguale a quello trovato per la moltiplicazione; e questa coincidenza si spiega agevolmente considerando $\frac{a}{b}$ come il prodotto di a per $\frac{1}{b}$.

493. Se il divisore b fosse preso col suo valore esatto, bisognerebbe fare $\beta=0$, e l' errore relativo del quoziente sarebbe precisamente eguale a quello del dividendo; se il dividendo è quello che è preso esattamente, l' errore relativo del quoziente sarà minore di quello del divisore.

Se si tratta di una frazione propriamente detta, i cui due termini sieno calcolati a meno di una mezza unità, si avrà

$$a<b,\quad \alpha<\frac{1}{2},\quad \beta<\frac{1}{2};$$

l'errore assoluto del quoziente (492) sarà minore di $\frac{1}{2}\frac{a+b}{b^2}$, e a più forte ragione, minore di $\frac{1}{b}$

494. Proponiamoci ora di determinare in generale quante cifre bisogna impiegare nei termini a e b, affinchè si possa contare sulle m prime cifre del quoziente $\frac{a}{b}$.

È sufficente che l'errore relativo del quoziente sia minore di $\frac{1}{10^m}$ (479), e poichè esso è minore della somma degli errori relativi di a e di b basterà che questi sieno ambedue minori di $\frac{1}{2.10^m}$.

Dunque, *tutte le volte che la prima cifra a sinistra di* a *o di* b *supererà* 1, *basterà calcolare questo numero con* m+1 *cifre* (477); *altrimenti, se ne prenderanno* m+2.

Si deve osservare che $m+1$ cifre basteranno sempre quando il valore di un solo dei termini a o b sarà approssimato, e l'altro esatto.

495. Facendo uso della prima cifra k del quoziente, cifra che si può spesso conoscere immediatamente, si abbassano i limiti che abbiamo assegnati. In fatti, perchè si possa contare sulle m prime cifre del quoziente, basta che l'errore relativo sia minore di $\frac{1}{(k+1)\,10^{m-1}}$; e per conseguenza, che gli errori relativi di a e di b sieno inferiori a $\frac{1}{2(k+1)10^{m-1}}$. Dunque *se* k *non supera* 4, anche quando la prima cifra a sinistra di a o b fosse 1, *basteranno sempre* m+1 *cifre per ciascun termine.*

Non si debbono impiegare $m+2$ cifre, se non quando la cifra k supera 4, e che al tempo stesso la prima cifra di a, o di b, è uguale a 1.

Quando la prima cifra di uno dei termini eguaglierà o supererà $2(k+1)$ (o semplicemente $k+1$, se l'altro termine è preso col suo valore esatto), m cifre basteranno per questo termine.

496. ***Reciprocamente,*** se a e b sono dati approssimativamente, ciascuno con m cifre, si potrà sempre contare sopra $m-2$ cifre del quoziente, cominciando dalla prima cifra significativa a sinistra; e anche, si potrà contare sopra $m-1$ cifre, tutte le volte che le prime cifre di a e b supereranno 1, o che la prima cifra k del quoziente non sorpasserà 4.

Nel caso in cui a e b non saranno dati con lo stesso numero di cifre, si prenderà per m il numero delle cifre di quello che ne ha meno.

Esempio. Calcolare con tre cifre esatte il raggio di una circonferenza la cui lunghezza è espressa da $\sqrt{3}$.

Il valore del raggio è $\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$. e si ha

$$\sqrt{3} = 1{,}7320, \qquad 2\pi = 6{,}283\ldots\ldots$$

Dividendo 17 per 6, si vede subito che la prima cifra k del quoziente è 2. Per conseguenza (495) basteranno m o *tre* cifre pel divisore la cui prima cifra è 6; e per il dividendo la cui prima cifra è 1, si prenderanno $m+1$ o 4 cifre. I valori approssimati di $\sqrt{3}$ e di 2π che entrano nel calcolo, saranno dunque rispettivamente

$$1{,}732 \quad \text{e} \quad 6{,}29.$$

Dividendo 1732 per 629, si trova per quoziente 275...., astrazion fatta dall'ordine delle unità che rappresenta.

Infine, si aumenterà di una unità la terza cifra, e rimettendo la virgola si avrà 0,276 per il valore cercato del raggio, a meno di un millesimo dell'unità lineare.

Divisione abbreviata.

497. Quando il dividendo e il divisore sono composti di un gran numero di cifre, non è necessario, per avere il quoziente con una data approssimazione, di conservarle tutte sino al termine dell'operazione; ma si possono abbreviare di molto i calcoli mediante il seguente metodo.

Sia proposto di calcolare il quoziente

$$(A) \qquad \frac{190627295.46}{147356,785},$$

a meno di 0,0001 del suo valore, cioè con cinque cifre esatte. Basteranno $m+2$ o *sette* cifre, tanto al dividendo che al divisore (494); non consideriamo le virgole, poichè sarà facile tenerne conto alla fine del calcolo, e aumentiamo di una unità la settima cifra del divisore affinchè il quoziente sia approssimato per difetto. La questione è ridotta a calcolare le cinque prime cifre intere o decimali del quoziente

$$(B) \qquad \frac{1906272}{1473568},$$

i cui due termini saranno considerati come numeri esatti, e sappiamo che questo quoziente sarà approssimato per difetto a meno di una unità dell'ordine della sua quinta cifra. Ecco il quadro delle operazioni:

	467
1906272	1473568
4327040	129364
1379904	
53691	
9483	
639	

La regola ordinaria non riceve alcuna modificazione per *le due prime cifre* del quoziente. Così, dopo aver trovata la cifra 1 e il resto 432704, si è aggiunto un zero alla destra di questo resto, e una seconda divisione ha dato la cifra 2 col resto 1379904. Restano a trovare tre cifre, che sono le tre prime cifre del quoziente $\frac{1379904}{1473568}$, e si sa che per ottenerle esattamente non è necessario conservare sette cifre al divisore; basterebbero le prime quattro (494), poichè il dividendo 1379904 è considerato come esatto, e che il divisore solo sarà alterato. Ma, affinchè gli errori che vanno accumulandosi nel corso del calcolo non possano rendere dubbia la quinta cifra del quoziente richiesto, si sopprime solamente l'ultima cifra 8 del divisore, avendo cura di sostituire alla penultima la cifra superiore di una unità, 7, che si scrive al disopra, cioè si divide 1379904 per 147357. A questo modo, il quoziente sarà sempre approssimato per difetto, e l'errore possibile sarà minore di una unità inferiore *di due ordini* all'unità della quinta cifra del quoziente. La divisione di 1379904 per 147357 dà la cifra 9 e il resto 53691. Ragionando su questo resto come sul precedente, siamo condotti a sopprimere l'ultima cifra dal nuovo divisore, che si riduce a 14736, e a dividere per questo numero il resto 53691. L'errore che risulta da questa nuova semplicizzazione è dello stesso senso della precedente, ed ha anche per limite 0,01 dell'unità della quinta cifra del quoziente. Si trova così la cifra 3, e il resto 9483, che diviso per 1474, dà la quinta cifra 6. Per valutare l'errore che proverrà dal rigettare la frazione complementaria $\frac{639}{1474}$, è utile calcolare ancora la cifra seguente, dividendo 639 per 148; questa cifra è 4. Ciò posto, 1,2936

è il valore approssimato per difetto del quoziente (B), a meno di una unità dell' ordine della quinta cifra.

In fatti, se s' indica con u questa unità, si ha successivamente

$$\frac{1906272}{1473568} = 1,2 + \frac{1379904^{\text{decimi}}}{1473568} = 1,2 + \frac{1379904^{\text{cent.}}}{147357} + \alpha,\ \alpha < \frac{u}{100}$$

$$= 1,29 + \frac{53691^{\text{cent.}}}{147357} + \alpha = 1,29 + \frac{53691^{\text{mill.}}}{14736} + \alpha',\ \alpha' < \frac{2u}{100},$$

$$= 1,293 + \frac{9483^{\text{mill.}}}{14736} + \alpha' = 1,293 + \frac{9483^{\text{diecimill.}}}{1474} + \alpha'',\ \alpha'' < \frac{3u}{100}$$

$$= 1,2936 + \frac{639^{\text{diecimill.}}}{1474} + \alpha''.$$

Questa serie di eguaglianze fa manifesta l'accumulazione degli errori, e si può conchiuderne che, finchè non vi saranno da calcolare più di *dodici* cifre pel quoziente, l' errore finale sarà minore di $\frac{10u}{100}$ o di $\frac{1}{10}$ dell' unità dell' ultima cifra; ma bisogna aggiungervi l' errore proveniente dall'aver trascurato la frazione complementaria. Nell' esempio che ci occupa, la prima delle cifre che dà questa frazione $\frac{639}{1474}$ è un 4, e questa cifra rappresenta unità eguali a $\frac{u}{10}$: dunque l' errore totale che affetta il quoziente 1,2936 è minore di

$$\left(\frac{5u}{10} + \frac{3u}{100}\right) = \frac{53u}{100},$$

e a più forte ragione minore di u. Ciò che bisognava dimostrare.

Ritorniamo infine al quoziente (A); conformemente alla regola del n° 480, dovremo aumentare di una unità

l'ultima cifra del quoziente precedente, e, rimettendo la virgola al suo posto, avremo

1293,7

per il valore approssimato che si voleva ottenere.

Avendo cura, come l'abbiamo prescritto, di aumentare di una unità la penultima cifra del divisore, al tempo stesso che si sopprime l'ultima, tutti i quozienti successivi saranno approssimati per difetto, e non è possibile incontrare 10 per quoziente di una delle divisioni parziali, ciò che potrebbe al contrario accadere se non si prendesse la precauzione indicata.

REGOLA GENERALE. *Quando il dividendo e il divisore sono composti di un gran numero di cifre intere o decimali, e che si vogliano solamente ottenere* m *cifre esatte nel quoziente cominciando dalla cifra significativa delle più alte unità, si conservano le sole* $m+2$ *prime cifre del dividendo e del divisore, e non considerando le virgole, si calcolano come all'ordinario le due prime cifre del quoziente. Ciò fatto, si sopprime l'ultima cifra del divisore, aumentando di una unità la penultima, e si divide pel numero che risulta, il resto proveniente dal calcolo delle due prime cifre del quoziente. Questa divisione dà la terza cifra del quoziente.*

Per avere la seguente, si opera sul divisore precedente come sul divisore primitivo, cioè si sopprime la sua ultima cifra, avendo cura di aumentare la penultima di un' unità; poi si divide pel numero che risulta il resto della divisione precedente; e così di seguito.

Finalmente, si aumenterà di una unità la m^{esima} *cifra trovata al quoziente.*

OSSERVAZIONE. *L'errore che comportano le ridu-*

zioni operate sui divisori successivi aveva per limite, nell'esempio di sopra, $\frac{3}{100}u$. Per conseguenza, la frazione complementaria sarebbe stata ancora trascurabile, anche quando il suo valore avesse raggiunto $\frac{97}{100}$. In generale, l'errore che la divisione abbreviata produce sopra un quoziente di m cifre ha per limite $\frac{m-2}{100}u$, u indicando sempre l'unità della m^{esima} cifra; e per conseguenza, *finchè la frazione complementaria non supererà* $1-\frac{m-2}{100}$ *sarà trascurabile*, senza che il quoziente cessi di avere l'approssimazione richiesta; lo che accadrà ordinariamente. Tuttavia, nel caso contrario, la regola precedente dovrebbe essere modificata in questo senso, che le riduzioni sul divisore non dovrebbero cominciare che dopo aver trovato mediante la regole ordinaria, *le tre prime cifre del quoziente* ec.

Non diremo nulla riguardo all'estrazione della radice quadrata e cubica, poichè quello che abbiamo detto nei Capitoli XI e XII è sufficiente per l'oggetto che ci proponevamo. Per altri particolari su questo importantissimo argomento si può consultare: *Théorie générale des Approximations numériques, par* I. Vieille.

Esercizi.

I. Calcolare a meno di 0,00001, i numeri

$$\frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}}\pm\frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}}\pm\frac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}}$$

II. Calcolare a meno di 0,0000001, il quadrato, il cubo e la quarta potenza del numero

$$\pi = 3{,}14159265358979323846\ldots.$$

III. Calcolare, a meno di 0,0000001 il quoziente

$$\frac{\frac{\pi^3}{6} - \pi}{\frac{\pi^4}{24} - \frac{\pi^2}{2} + 1},$$

nel quale π ha lo stesso valore del quesito precedente.

NOTA (a)

SUI DIFFERENTI SISTEMI DI NUMERAZIONE.

Il principio del nostro sistema di numerazione non dipende dalla scelta particolare del numero 10, che vi esprime il rapporto di una unità a quella dell'ordine seguente. Si sarebbe potuto porre un'altra base, e, conservando lo stesso principio, fare uso di un numero differente di caratteri. Se, per esempio, si prendesse per base il numero 8, bisognerebbe convenire che una cifra posta alla destra di un'altra le fa acquistare un valore 8 volte maggiore. Quindi le unità dei differenti ordini si scriverebbero

10
100
1000
10000
ec.

e rappresenterebbero rispettivamente 8 unità, 64 unità, 512 unità, 4096 unità, e ciascuna di esse sarebbe 8 volte più grande della precedente. Per scrivere un numero in questo sistema, bisognerebbe risolverlo in unità di diversi ordini, e non si avrebbe mai bisogno di ammettere più di 7 unità di un ordine dato, giacchè 8 ne formerebbero una dell'ordine seguente. 8 caratteri, compresovi lo zero, basterebbero per scrivere tutti i numeri.

(a) Oltre questa Nota, nella Seconda edizione ve ne erano ancora altre due sulla moltiplicazione e divisione abbreviate; noi le abbiamo tolte, perchè questo soggetto è stato da noi esposto nel Capitolo XX. (T.)

Convertire in un sistema qualunque un numero scritto nel sistema decimale.

Abbiasi il numero 783214, scritto nel sistema decimale, che si voglia convertire nel sistema la cui base è 8. Poichè in questo sistema ciascuna unità del second' ordine vale 8 unità semplici, dividendo il numero proposto per 8, il quoziente esprimerà il numero di unità del second' ordine che esso contiene, e il resto sarà, per conseguenza, la cifra delle unità semplici. Al modo stesso, dividendo il quoziente ottenuto per 8, il nuovo quoziente sarà il numero delle unità del terzo ordine, e continuando così sino a che si giunga a un quoziente minore di 8, si otterranno tutte le cifre dell'espressione richiesta. Ecco il tipo del calcolo:

783214	8					
63	97901	8				
72	17	12237	8			
01	19	42	1529	8		
14	30	23	72	191	8	
6	61	77	09	31	23	8
	5	5	1	7	7	2

Le cifre cercate sono i resti successivamente ottenuti e l' ultimo quoziente; l' espressione cercata è dunque 2771556.

Osservazione. Se la base scelta è maggiore di 10, bisognerà fare uso di più di dieci caratteri. Per esempio, nel sistema la cui base è 12, o duodecimale, vi bisognerebbe un carattere per esprimere 10 e un altro per esprimere 11; sieno questi, per esempio, *a* e *b*. Applicando il metodo precedente al numero 59321 si trova che esso si esprime, nel sistema duodecimale, con 2*a*3*b*5.

Convertire nel sistema decimale un numero scritto in un sistema qualunque.

Questa questione non differisce in fondo dalla precedente; nei due casi si tratta di passare da un sistema ad un

altro, e il sistema decimale non ha alcuna proprietà particolare che obblighi a distinguerlo dagli altri. Si potrebbe dunque passare da un sistema qualunque al sistema decimale mediante una serie di divisioni; ma queste divisioni dovrebbero essere fatte nel sistema di numerazione nel quale sarebbe scritto il numero dato, e potrebbero, a causa della mancanza di abitudine, sembrare più imbarazzanti. Si possono quindi sostituire a queste divisioni delle moltiplicazioni fatte nel sistema decimale.

Esempio. Sia da convertire nel sistema decimale il numero $39\,a\,4$, scritto nel sistema duodecimale,

La cifra 4 esprime 4 *unità*,
La cifra a esprime 10×12 o 120 *unità*,
La cifra 9 esprime 9×12^2 o 1296 *unità*,
La cifra 3 esprime 3×12^3 o 5184 *unità*,

e per conseguenza, il numero proposto esprime le somme di questi differenti prodotti, cioè 6604.

Osservazione. Si potrebbe anche passare dal sistema decimale a un sistema qualunque, effettuando solamente moltiplicazioni; ma queste moltiplicazioni dovrebbero essere fatte nel nuovo sistema di numerazione.

Noi non ci occuperemo della maniera di operare in questi differenti sistemi, che non sono mai usati. Le regole essendo del resto assolutamente le medesime che pel sistema decimale, non vi sarà alcuna difficoltà per trovarle ed applicarle.

Esercizi.

I. Quali sono, in un sistema di numerazione qualunque, i numeri che godono di proprietà analoghe a quelle del numero 9 e 11 [(83), (86)] nel sistema decimale?

II. b essendo la base di un sistema di numerazione, se un numero θ divide b^m-1 e un numero N di m cifre, θ dividerà tutti i numeri risultanti dalle diverse permutazioni circolari di N (si chiamano permutazioni circolari di m cifre i differenti risultati che si otterrebbero scrivendo tutte queste cifre in cerchio, e leggendole, cominciando da una cifra qualunque seguendo il cerchio).

Nota (**A**).

I romani non avevano cifre apposite per la scrittura dei numeri, ma usavano le lettere del loro alfabeto disposte in un modo convenuto. Ecco i numeri principali con la loro corrispondenza in cifre arabe:

I,	V,	X,	L,	C,	IↃ,	CIↃ,	IↃↃ,	CCIↃↃ, ec.
1,	5,	10,	50,	100,	500,	1000,	5000,	10000,

Con questi caratteri indicavano anche tutti i numeri intermedi, servendosi di un'altra convenzione, cioè che un carattere di eguale o di minor valore posto dopo s'intendeva aggiunto, e posto innanzi s'intendeva sottratto, come qui sotto,

II.	III,	IV,	VI,	VII,	VIII,	IX,	XI,	XII,	XIV,	XV,	XVI,	XIX
2,	3,	4,	6,	7,	8,	9,	11,	12,	14,	15,	16,	19.

XX,	XXX,	XL,	LX,	XC,	CX,	CXX,	CXLVII,	CIↃIↃCCCXLIV,
20,	30,	40,	60	90,	110,	120,	147,	1844.

Alle cifre IↃ, CIↃ indicanti 500, e 1000 si sono anche sostituite le lettere D, M, di modo che il numero 1844 si scriverebbe pure così, MDCCCXLIV.

Nota (**B**).

Delle frazioni continue.

Si chiama *frazione continua* un'espressione della forma:

$$a + \cfrac{\beta}{b + \cfrac{\gamma}{c + \cfrac{\delta}{d + \text{ec.}}}}$$

Effettuando i calcoli indicati in una simile espressione, si ottiene per risultato una frazione ordinaria che è il valore della frazione continua.

Abbiasi, per esempio, la frazione continua

$$5+\cfrac{3}{4+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{5}}};$$

si trova successivamente

$$2+\frac{3}{5}=\frac{13}{5},\quad \cfrac{2}{2+\cfrac{3}{5}}=\frac{10}{13},\quad 4+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{5}}=4+\frac{10}{13}=\frac{62}{13},$$

$$\cfrac{3}{4+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{5}}}=\frac{39}{62},\quad 5+\cfrac{3}{4+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{4}}}=5+\frac{39}{62}=\frac{349}{62}.$$

Nelle frazioni continue che più ordinariamente si adoperano, i numeratori β, γ, δ, ec. sono eguali all' unità, ed hanno per conseguenza la forma

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\text{ec.}}}};$$

a, b, c, d, ec., sono numeri interi.

Le frazioni continue di quest' ultima forma si trovano quando si vogliono esprimere in numeri quantità frazionarie, o quantità incommensurabili, di cui si può avere il valore approssimato a meno di una unità. In fatti, supponiamo che si voglia valutare una quantità qualunque x, che non può essere data da un numero intero. Se in prima si cerca il numero intero a che più si avvicina al valore di x, la differenza $x-a$ sarà una frazione minore dell' unità, che si potrà rappresentare con $\frac{1}{y}$, y essendo un numero maggiore dell' unità; se, al modo stesso, si cerca il numero intero b che meno differisce dal valore di y, la differenza $y-b$ potrà es-

sere rappresentata da $\frac{1}{z}$, z essendo un numero maggiore dell' unità. Continuando a questo modo, si avrà

$$x = a + \frac{1}{y},\; y = b + \frac{1}{z},\; z = c + \frac{1}{u},\; u = d + \frac{1}{v},\; \text{ec.};$$

da cui si deduce

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \text{ec.}}}}$$

Se tra le quantità x, z, u, v, ec. se ne trovi una che sia espressa esattamente da un numero intero, la frazione continua avrà un termine. Nel caso contrario, la frazione continua si prolungherà indefinitamente.

Supponiamo che la quantità che si vuol ridurre sotto forma di frazione continua sia un numero frazionario dato $\frac{A}{B}$, A e B essendo numeri interi.

Il numero intero che più si avvicina a questa quantità è il quoziente della divisione di A per B. Chiamiamo a questo quoziente e C il resto, si ha

$$\frac{A}{B} = a + \frac{C}{B} = a + \frac{1}{\left(\frac{B}{C}\right)}.$$

Sieno b il quoziente della divisione di B per C, e D il resto, si ha

$$\frac{B}{C} = b + \frac{D}{C} = b + \frac{1}{\left(\frac{C}{D}\right)}.$$

Continuando a questo modo si vede che *per ridurre una frazione ordinaria in frazione continua, bisogna operare sui due termini di questa frazione come se si volesse trovare il loro massimo comun divisore, dividendo prima il numeratore pel denominatore. Se i quozienti successivi che si ottengono me-*

diante questa operazione sono a, b, c, d, *ec., il primo quoziente potendo essere zero, la frazione continua è*

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\text{ec.}}}}$$

Applicando questo procedimento si trova

$$\frac{1103}{887}=1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}}}.$$

Poichè la ricerca del massimo comun divisore di due numeri conduce sempre a un quoziente che è un numero intero, *qualunque quantità commensurabile può essere espressa mediante una frazione continua finita.*

Reciprocamente, *qualunque frazione continua finita esprime un quantità commensurabile;* poichè se ne può ottenere esattamente il valore, espresso mediante una frazione ordinaria.

Da ciò segue che *una quantità incommensurabile non può dare che una frazione continua indefinita.*

Le frazioni

$$\frac{a}{1},\quad a+\frac{1}{b}=\frac{ab+1}{b},\quad a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}=\frac{(ab+1)c+a}{bc+1},\ \text{ec.}$$

si chiamano *ridotte.*

La semplice ispezione di una frazione continua è sufficiente per far vedere che *il valore della frazione continua è compreso tra due ridotte consecutive qualunque;* e in Algebra poi si dimostra che *ciascuna ridotta si avvicina più al valore della frazione continua della ridotta precedente.*

Da ciò segue che

$$1,\quad 1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4},\quad 1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{9}}=\frac{46}{37},\quad 1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2}}}=\frac{97}{78}.$$

$$1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}}}}=\frac{143}{115},\qquad 1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}}=\frac{240}{193},$$

$$1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}}}=\frac{1103}{887}$$

rappresentano valori della frazione $\frac{1103}{887}$ di più in più approssimati. Talune volte può essere utile prendere dei valori approssimati di una frazione irriducibile di termini molto grandi.

INDICE.